НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"
ІНСТИТУТ ФІЗИКИ НАНУ

О. О. Чумак

КВАНТОВА ОПТИКА

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Львів
Євросвіт
2012

УДК ????
ББК ???

Чумак О. О. Квантова оптика. – Львів: Євросвіт, 2012. – 272 с.: іл.

ISBN 978-966-8364-80-8

В основу посібника покладено курс лекцій, що читався студентам Києво-Могилянської академії. Крім традиційних для цієї галузі фізики тем (квантування електромагнітного поля, природа квантових кореляцій, детектування фотонів тощо), значну увагу приділено сучасним проблемам квантової оптики. Виклад супроводжується задачами, розв'язання яких допоможе оволодіти математичним апаратом квантової оптики, краще зрозуміти та доповнити основний текст.

Посібник може бути корисним насамперед студентам і аспірантам фізичних спеціальностей, а також науковим співпрацівникам і всім тим, хто має базові знання з квантової механіки.

Рецензенти:

М. С. Бродин, д-р фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України (Інститут фізики НАН України)
В. Слободянюк, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

ISBN 978-966-8364-80-8

Зміст

Передмова

Народження квантової оптики одночасно було й народженням квантової механіки. Ця подія сталася в 1900-му році, коли Макс Планк для пояснення спектру випромінювання абсолютно чорного тіла сформулював гіпотезу, за якою електромагнітна енергія випромінюється дискретними порціями (квантами). Після цього вже логічним було припустити, що енергія електромагнітного поля із заданою частотою кратна енергії кванта, який зараз називають фотоном. Ідея дискретності світлового поля була використана для знаходження спектральної густини енергії випромінювання абсолютно чорного тіла, яку можна було порівняти з експериментальними даними.

Найпереконливішим свідченням квантової природи світла стали порівняно недавні результати експериментів, в яких досліджували інтерференцію інтенсивностей електромагнітних полів, тобто кореляції оптичних полів четвертого порядку. Показано, що ці кореляції описуються саме квантовою теорією.

Упродовж останніх десятиліть відбувався стрімкий розвиток квантової оптики. Цьому сприяли і створення високоточних методів вимірювання оптичних полів та їхніх кореляційних функцій, і практичне використання квантових ефектів, і розвиток математичної теорії. Очевидно, що ці досягнення мають бути відображені в спецкурсах для студентів фізичних спеціальностей. Запропонований посібник може бути перехідною ланкою між базовим курсом квантової механіки та статтями і монографіями, в яких відображено прогрес у квантовій фізиці. Розуміння на сучасному рівні суті квантових процесів може полегшити читачам перехід до самостійних занять квантовою оптикою.

У посібнику практичне використання деяких квантових явищ проілюстровано на конкретних прикладах. Зокрема читачеві запропонована сучасна теорія ефекту Казимира. Сила Казимира, яка є виявом нульових коливань вакууму, відіграє особливо важливу роль у наномеханічних пристроях.

Показано практичне використання двофотонних кореляцій на прикладі поширення квантового криптографічного ключа. Пояснено один із можливих протоколів передачі інформації, які вже використовують для зв'язку, захищеність якого від несанкціонованого доступу (підслуховування) забезпечується загальними принципами квантової механіки.

Теорія взаємодії електромагнітного поля з дворівневою системою подана і у квазікласичній, і в квантовій версії. Деякі типи дворівневих систем є кандидатами на роль квантових одиниць інформації (кубітів) у майбутніх квантових комп'ютерах. Показано, що за допомогою електромагнітного поля можна впливати на стан кубіта, вимірювати (зчитувати) сам стан. Описано один з можливих способів неруйнівного вимірювання, тобто вимірювання, повторення якого дає попередній результат.

Значний об'єм посібника відведено викладу математичного апарату квантової оптики. Докладно описано фоківські та когерентні стани, є інформація про стиснені стани.

У сьомому розділі подано доведення операторних теорем та співвідношень між операторами, що часто використовують у квантовій оптиці. Цей матеріал значно спрощує подальший виклад та розв'язування задач, які взяті із сучасних монографій або ж запропоновані автором уперше.

У четвертому розділі показано, що оптичні явища можна описувати за допомогою функції розподілу фотонів у координатно-імпульсному просторі. Така альтернатива хвильовому рівнянню не суперечить останньому, а лише ілюструє на конкретному прикладі дуальність квантового світу. Цей розділ можна розглядати як доповнення до сучасних методів квантової оптики.

1. Вступ

1.1. Еволюція уявлень про природу світла

Історичні джерела вказують на те, що різноманітні уявлення про природу світла існували споконвічно. Початок формування сучасної теорії оптичних явищ можна віднести до кінця XVII – початку XVIII сторіч. Саме тоді з'явились два різні, як тоді здавалось, погляди на природу світла. Їхніми яскравими виразниками були Християн Гюйґенс та Ісаак Ньютон. Зокрема, Гюйґенс сформулював принцип, за яким світло розглядалось як процес поширення хвиль у просторі. Згодом ідеї Гюйґенса істотно розвинув та доповнив Огюстен Жан Френель. Френель увів поняття когерентності та інтерференції елементарних світлових хвиль. Це дало змогу побудувати математичну теорію поширення світла, основою якої є так званий принцип Гюйґенса–Френеля і яка й досі знаходить широке застосування.

Видатний математик і фізик Ісаак Ньютон також вважав, що світлові явища зумовлені звичайними фізичними процесами, але, на відміну від Гюйґенса, розглядав світло як потік частинок (корпускул), рух яких описується рівняннями механіки. Ньютон зробив вагомий внесок у становлення та розвиток оптики як фізичної науки. Зокрема він докладно дослідив і описав інтерференційний ефект (1675), відомий нині як "кільця Ньютона". Схему експерименту зображено на рис. 1. Світло, що проходить крізь лінзу з великим радіусом та плоско-паралельну пластинку, частково відбивається на межах скляних поверхонь. Промені, що пройшли без жодного відбиття, інтерферують з променями, що двічі відбились (від пластинки та нижньої поверхні лінзи). Для монохроматичних променів спостерігається інтерференційна картина, на якій яскраві кільця чергуються з темними. Для денного світла, що має широкий спектр, однаковий набіг фази для хвиль із різною довжиною перебуває у різних ділянках горизонтальної поверхні. Тому в цьому випадку чергуються різнокольорові кільця.

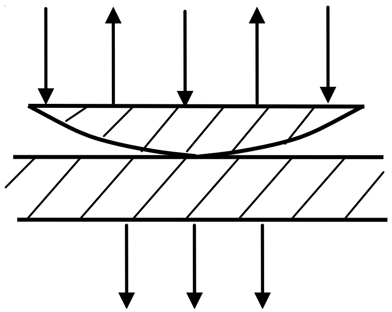

Рис. 1. Схема експерименту для спостереження “кілець Ньютона”

На практиці описана вище інтерференційна картина має дуже малу контрастність (видність), тому зазвичай її спостерігають у відбитому світлі.

Попри таке просте пояснення появи “кілець Ньютона”, що випливає з хвильової теорії, сам Ньютон не визнавав її. Оскільки авторитет Ньютона був дуже високим, то упродовж довгого часу корпускулярна теорія світла залишалась головною.

Та після того, як Джеймс Клерк Максвелл об’єднав теорії електричних явищ та магнетизму, стало зрозуміло, що світло – це процес хвилеподібного поширення у просторі зв’язаних електричних та магнітних полів. Простота і зрозумілість хвильової теорії стали настільки очевидними та продуктивними, що уявлення Ньютона про природу світла уже здавались дуже наївними і надуманими, оскільки їхнє використання не давало змоги пояснити надійно встановлені експериментальні факти. Проте така ситуація проіснувала

лише до появи квантової теорії, яка показала, що світло можна вважати ансамблем дискретних об’єктів (світлових квантів чи фотонів), яким притаманні і хвильові властивості, і властивості частинок.

У зв’язку з останнім твердженням виникає запитання, чи можна, все-таки, описувати процеси розповсюдження оптичного випромінювання, розглядаючи його як переміщення окремих частинок, а не як поширення хвиль? Хвильове рівняння для електромагнітного поля давно відоме і його широко використовують для конкретних розрахунків. Проте далі ми побачимо (розділ 4), що за певних умов поширення світла можна описувати навіть з використанням рівнянь класичної механіки (тобто рівнянь Ньютона!). Такий підхід можна обґрунтувати у тому випадку, коли характерні довжини неоднорідностей середовища, в якому поширюється світло, значно більші від довжини хвилі випромінювання. Вплив неоднорідності середовища на світло можна врахувати, замінивши його дією зовнішніх (фіктивних) сил на рух окремих фотонів, в результаті чого змінюються швидкості фотонів так само, як і в класичній механіці змінюються швидкості руху матеріальних об’єктів. Найчастіше ці сили виражають через градієнт показника заломлення середовища, в якому поширюється світло.

Важливо підкреслити, що немає ніяких суперечностей між хвильовим та корпускулярним підходами для опису розповсюдження світла, оскільки основою обох є рівняння Максвелла. Обидва вони дають однакові результати у тих випадках, коли їх використання є математично обґрунтованим. До того ж, так званий принцип корпускулярно-хвильового дуалізму означає, що в квантових системах поєднуються властивості частинок і хвиль і, взагалі кажучи, немає підстав надавати переваги тому чи іншому способу їхнього опису.

Докладно корпускулярний підхід для опису поширення світла розглянемо у розділі 4.

Нині квантова природа світла є загальновизнаною. В історичному плані утвердженню цієї ідеї сприяла низка експериментальних досліджень, результати яких пояснювала саме квантова теорія. Насамперед потрібно згадати явище фотоефекту.

а) **Фотоефект**

Альберт Ейнштейн, використовуючи гіпотезу про світлові кванти, запропонував пояснення такого фізичного явища як фотоефект. Фотоефект полягає в тому, що під час падіння світла на тверде тіло можлива емісія електронів. На рис. 2 схематично зображено зміну енергії електрона в результаті поглинання ним енергії кванта електромагнітного поля.

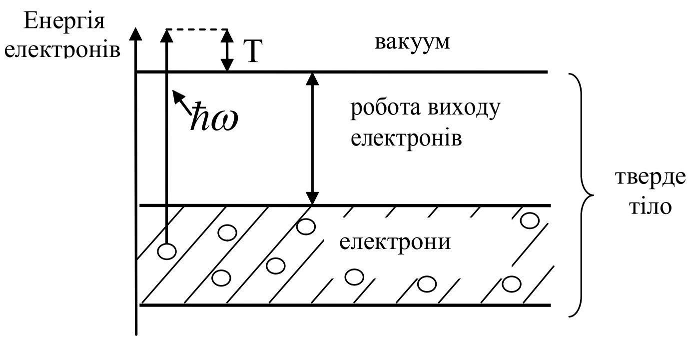

Рис. 2. Вихід електрона з твердого тіла у вакуум можливий лише тоді, коли енергія світлового кванта $\hbar\omega$ більша від роботи виходу. Кінетична енергія електронів у вакуумі (T) не перевищує різниці енергії кванта та роботи виходу

З основних закономірностей фотоефекту зазначимо такі:

1. Енергетичний розподіл електронів у вакуумі не залежить від інтенсивності світла, а лише від його частоти;

2. Швидкість емісії пропорційна інтенсивності випромінювання;

3. Майже відсутня затримка в часі між початком опромінення поверхні та початком емісії.

Довго здавалось, що саме остання властивість незаперечно вказує на квантову природу випромінювання, тобто, що цю властивість можна пояснити лише на підставі поняття про світлові кванти. Аргументація Ейнштейна була досить зрозумілою та послідовною. Його 1921 року нагородили Нобелівською премією з фізики за пояснення явища фотоефекту. Проте за деякий час після побудови докладної квантової теорії було показано, що закономірності фотоефекту можна пояснити, вважаючи електромагнітне поле класичним. З'ясувалось, що квантовий підхід потрібний лише для опису системи атомів (але не випромінювання!), що утворюють тверде тіло (див. працю Лемба, 1995 р.).

Дірак побудував послідовну теорію квантування електромагнітного поля. Суть її полягає в тому, що кожній моді хвильового поля можна поставити у відповідність гармонічний осцилятор. Забігаючи наперед, додамо, що з переходом до квантового формалізму координата та імпульс осцилятора $\{q, p\}$ замінюються на оператори $\{\hat{q}, \hat{p}\}$ з відомими комутаційними властивостями. Відтак, електромагнітні поля також стають операторами, що є лінійними функціями змінних $\{\hat{q}, \hat{p}\}$.

Докладніше квантування електромагнітного поля розглянемо в розділі 2.

Якщо фотони вважати частинками, то, як і будь-які частинки, вони мусили б мати імпульс, існування якого виявлятиметься під час взаємодії світла та, наприклад, електронів. І справді, саме наявністю фотонного імпульса можна пояснити ефект Комптона, що був відкритий експериментально (A. Compton, 1892–1962).

б) **Ефект Комптона**

Суть ефекту полягає в тому, що під час розсіяння електромагнітної хвилі на електроні спостерігається зменшення її частоти. Пояснення незалежно один від одного запропонували Комптон і Дебай для випадку рентґенівського випромінювання. Розглядаючи фотони як частинки, можна знайти зміну їхньої енергії та імпульсу в процесі елементарної взаємодії з електронами. Для цього досить врахувати ту обставину, що повний імпульс та енергія системи до і після зіткнення електрона з фотоном є незмінними. Якщо до взаємодії енергії електрона та фотона дорівнюють відповідно $m_e c^2$ (нерухомий електрон) та $\hbar\omega$, а імпульси $\vec{p}_e^{\,0} = 0$ *і* $\vec{p}$, то після взаємодії ці величини зміняться. Енергії електрона та фотона дорівнюватимуть:

$$\left[\left(m_e c^2\right)^2 + p_e^2 c^2\right]^{1/2} \text{ та } \hbar\omega', \tag{1.1}$$

а імпульси набудуть значень $\vec{p}_e$ *і* $\vec{p}\,'$. Тут введені такі позначення: m_e – маса електрона; c – швидкість світла у вакуумі.

Із законів збереження енергії та імпульсу одержимо два співвідношення:

$$m_e c^2 + \hbar\omega = \left[\left(m_e c^2\right)^2 + p_e^2 c^2\right]^{1/2} + \hbar\omega', \tag{1.2}$$

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \vec{p}_e. \tag{1.3}$$

(див. рис. 3).

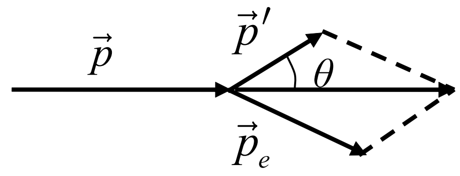

Рис. 3. Початковий імпульс фотона $\vec{p}$ завдяки взаємодії змінюється на $\vec{p}\,'$, а електронний – на $\vec{p}_e$

Враховуючи, що $\hbar\omega = cp$, $\hbar\omega' = cp'$, перепишемо рівняння (1.2) у такому вигляді:

$$m_e c^2 + c(p - p') = \left[m_e^2 c^4 + c^2 (\vec{p} - \vec{p}\,')^2\right]^{1/2}. \tag{1.4}$$

Далі піднесемо вирази у лівій та правій частинах до другої степені. Після скорочень одержимо:

$$m_e c(p - p') = pp'(1 - \cos\theta). \tag{1.5}$$

Поділивши ліву і праву частини на pp' та враховуючи, що

$$p = \frac{h}{\lambda},\ p' = \frac{h}{\lambda'},$$

одержимо:

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta). \tag{1.6}$$

Величину $\lambda_c = \dfrac{h}{m_e c} \approx 2{,}426 \cdot 10^{-10}$ см називають комптонівською довжиною хвилі (див. значення фізичних величин наприкінці розділу). Як бачимо, – це дуже мала величина, що на 5 порядків менша від довжини хвилі світла у видимому діапазоні.

Збільшення довжини хвилі фотона під час взаємодії з електроном означає зменшення величини фотонного імпульсу, а, отже, й зменшення енергії фотона. Використовуючи вираз (1.6), можна оцінити відносну зміну довжини хвилі $\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$ (див задачу **1**). Легко переконатись, що вона наближається до одиниці лише за дуже високих частот (наприклад, у випадку рентґенівського чи γ-випромінювання).

Отже, припущення, що фотони, як і будь-які матеріальні частинки, характеризуються не лише певними значеннями енергії, а й імпульсу, а також врахування законів збереження цих величин для всієї системи (електромагнітне поле + електрон), дає змогу просто пояснити ефект Комптона.

Ефект комптонівського розсіяння фотонів є релятивістським. Якщо ж у правій частині рівняння (1.4) вважати набуту електроном швидкість значно меншою від швидкості світла

$$\frac{|\vec{p} - \vec{p}'|}{m_e} = \frac{p_e}{m_e} << c,$$

то рівняння (1.4) зводиться до:

$$p_e \sim p - p' \approx \frac{p_e}{2m_e c} p_e \to 0,$$

тобто

$$p \approx p'.$$

Отже, у цьому випадку енергія фотона залишається незмінною.

Розв'язок нерелятивістської задачі про взаємодію електрона з монохроматичним випромінюванням (задача **2**) показує, що, справді, енергія такого випромінювання не передається електронам. Водночас, коли спектральна лінія випромінювання має скінченну ширину, то енергія електрона зростає завдяки зменшенню енергії поля (задачі **3**, **4**).

в) **Однофотонні кореляції**

Хоча існує багато переконливих підтверджень квантової природи світла, проте знову й знову проводять експерименти, спрямовані на те, щоб зрозуміти суть квантових явищ. Надзвичайно цікавими є сучасні дослідження фотонних кореляцій.

Спрощену схему відомого експерименту з однофотонних кореляцій зображено на рис. 4. Світлові імпульси через входи 0 та 1 подають на світлоподільник СП, який перерозподіляє інтенсивності між пучками 2 та 3 у пропорції 50 % : 50 %. Після проходження світлоподільника інтенсивності пучків реєструються детекторами D_2 та D_3. Роздільну здатність детекторів вважають достатньо високою, щоб розрізняти окремі фотони. Упродовж експерименту детектори реєструють відповідно n_2 та n_3 фотонів.

Нехай через входи 0, 1 одночасно подається по одному фотону. Тоді з міркувань симетрії можна зробити висновок, що середні значення $< n_2 >$ та $< n_3 >$ дорівнюватимуть одиниці. Символ <…> означає усереднення по повторюваних експериментах. Одночасно із середніми величинами $< n_2 >$ та $< n_3 >$ можна знайти середнє значення добутку $< n_2 n_3 >$. Оскільки взаємодія між фотонами відсутня, то, здавалося б, можна очікувати, що у половині випадків $n_2 n_3 = 1$. Водночас експеримент показує, що $< n_2 n_3 > = 0$.

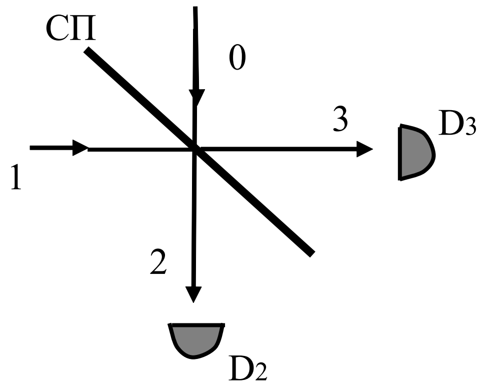

Рис. 4. Схема експерименту з однофотонних кореляцій

Такий, на перший погляд, несподіваний результат легко можна пояснити, використовуючи квантово-механічний підхід. Теорія та конкретні умови, потрібні для спостереження описаного явища, будуть предметом докладного розгляду в розділі 5. Пояснення парадоксального результату експерименту ґрунтується на врахуванні не тільки корпускулярних, а й хвильових властивостей фотонів (як і будь-яких квантово-механічних об'єктів). Саме хвильові властивості породжують додаткову (порівняно з класичним описом) кореляцію між фізичними об'єктами.

У нашому випадку додаткова кореляція виражається в тому, що $< n_2 n_3 >= 0$.

1.2. Деякі сучасні напрями досліджень у квантовій оптиці

Методами квантової оптики можна здійснювати унікальні експерименти в різних напрямах фізичних досліджень. Це пов'язано з тим, що завдяки технічному прогресу стало можливим оперувати окремими квантами електромагнітного поля. Зокрема існують детектори випромінювання, що можуть реєструвати окремі фотони з ймовірністю, близькою до 100 %. Тому стало можливим створення технологій, які використовують окремі фотони для здійснення захищеного від підслуховування оптичного зв'язку між віддаленими об'єктами (квантова криптографія). Дослідження в цій галузі стосуються і квантової оптики, і інформатики. Захищеність передачі інформації пов'язана саме з квантовою природою електромагнітного випромінювання. Парадоксальність ситуації полягає у тому, що, хоча висновки квантової теорії часто суперечать нашій інтуїції (в англомовній літературі таку ситуацію характеризують терміном "counterintuitive"), квантові особливості світлових явищ уже використовують для практичних потреб. Загальні принципи квантової криптографії та найпростіші протоколи передачі квантових криптографічних ключів розглянемо в розділі 6.

Останнім часом (здебільшого, упродовж останніх 10 років) широко досліджують квантові дворівневі системи, основними елементами яких є джозефсонівські контакти. Нині це найімовірніші кандидати для використання в ролі квантових одиниць інформації (qubit) у квантових комп'ютерах. На таких дослідженнях зосереджені потужні групи дослідників із різних країн.

Для контролю окремих кубітів та забезпечення взаємодії між ними використовують електромагнітне випромінювання та відповідні резонатори, що є аналогами звичайних оптичних резонаторів, але в низькочастотному (мікрохвильовому) діапазоні. Хоча цей напрям більше відповідав би назві квантова радіотехніка, фізичні явища в низькочастотній ділянці і теоретичні методи їхнього опису дуже подібні до того, що є предметом вивчення квантової оптики.

Звичайно, перелічені вище приклади застосування квантових властивостей світла є лише окремими ілюстраціями широких можливостей квантової оптики, яка нині перебуває в процесі свого швидкого розвитку.

На завершення вступу зазначимо, що оптичні дослідження і раніше мали вирішальний вплив на розвиток фундаментальної науки. Досить згадати, що фундаментальну фізичну константу $\hbar = h/2\pi$ увів Планк ще 1900 року як феноменологічний параметр, який він використовував для опису спектра випромінювання абсолютно чорного тіла. Саму квантову теорію було побудовано значно пізніше і в процесі її створення основну стимулювальну роль відігравали оптичні дослідження. Розвиток квантової оптики супроводжувався відокремленням від неї таких важливих, фактично, самостійних напрямів як атомна оптика, кореляційна оптика, лазерна фізика. Сучасну фізику неможливо уявити без теоретичних моделей та експериментальних методів квантової оптики.

Задачі

1. Виразити відносне зменшення частоти фотона $\Delta\omega/\omega$ під час комптонівського розсіяння через відносну зміну довжини хвилі $\Delta\lambda/\lambda$. Розглянути випадок $|\Delta\omega| << \omega$.

2. Показати, що в нерелятивістському наближенні енергія плоскої електромагнітної хвилі не передається вільним електронам.

Розв'язок

Нехтуючи квантовими та релятивістськими ефектами під час опису динаміки електрона, можна легко описати його взаємодію з монохроматичним полем.

Задамо поле у вигляді плоскої хвилі:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0\cos(\omega t - kz)\\ \vec{H} &= \vec{H}_0\cos(\omega t - kz)\end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Взаємну орієнтацію векторів $\vec{E},\vec{H},\vec{k}$ та ортів $\vec{e}_i$ зображено на рис. 5.

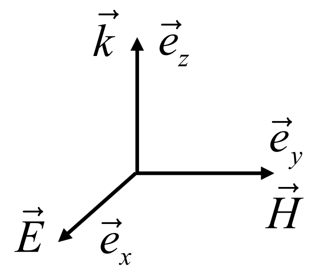

Рис. 5

Поля $\vec{E}$ і $\vec{H}$ не є незалежними, оскільки зв'язок між ними задається рівнянням Максвелла

$$rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{2}$$

Рівняння (2) задовольняється, коли взяти поля у такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{e}_x E_0\cos(\omega t - kz)\\ \vec{H} &= \vec{e}_y E_0\cos(\omega t - kz)\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Рух електрона під дією електричного поля хвилі описується рівнянням

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}\,, \tag{4}$$

розв'язком якого є функція

$$\vec{p}(t) = \vec{e}_x \frac{eE_0}{\omega}\sin(\omega t)\,, \tag{5}$$

де початкова (тобто, коли $t = 0$) швидкість та z-ва координата електрона дорівнюють нулеві.

У рівнянні (4) ми знехтували впливом магнітного поля $\vec{H}$ на рух електрона. В справедливості такого наближення можна переконатися з таких міркувань. На частинку, що рухається зі швидкістю $\vec{v}(t) = \vec{p}(t)/m_e$, діє сила Лоренца

$$\vec{F}_L = \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right]$$

у напрямку, перпендикулярному до векторів $\vec{v}$ та $\vec{H}$. Тоді

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right]_z = \frac{1}{c}\frac{e^2E_0^2}{m_e\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t), \tag{6}$$

де ми використали значення імпульсу (5) та другу формулу в рівнянні (3).

Інтегруючи обидві частини (6) по часу, легко одержуємо:

$$p_z(t) = -\frac{e^2E_0^2}{4m_e\omega^2 c}\cos(2\omega t)\,. \tag{7}$$

З рівняння (5), (7) видно, що відношення $|\,p_z/p_x\,|$ по порядку величини дорівнює $|e|E_0/(4m_e\omega c)$, що з врахуванням залежності $\omega = c2\pi/\lambda$ можна переписати у вигляді

$|e|E_0\lambda/(8\pi m_e c^2)$. Останнє (без врахування числового коефіцієнта $1/8\pi$) можна інтерпретувати як відношення енергії, одержаної електроном від постійного поля E_0 під час переміщення вздовж нього на відстань, що дорівнює довжині хвилі, до релятивістської енергії нерухомого електрона. Саме у випадку $|e|E_0\lambda/(8\pi m_e c^2) << 1$ наш розв'язок, який ґрунтується на ітераційній процедурі, є коректним і відповідає умові задачі.

Отже, енергія електрона, знайдена в нерелятивістському наближенні та усереднена за період коливання, дорівнює:

$$\frac{\overline{p_x^2}}{2m_e} = \frac{e^2E_0^2}{2m_e\omega^2}\overline{\sin^2(\omega t)} = \frac{e^2E_0^2}{4m_e\omega^2}\,. \tag{8}$$

З рівняння (8) видно, що середня енергія електрона не змінюється з часом. Тому можна вважати, що енергія поля також залишається незмінною. Це відповідає зробленому вище висновку, що комптонівське розсіяння фотонів є суто релятивістським ефектом.

Якщо електричне поле E_0 плавно змінюється в просторі, то формула (8) залишається в силі. Енергію $V_p = \dfrac{e^2E_0^2(\vec{r})}{4m_e\omega^2}$ можна вважати потенціальною енергією частинки в електромагнітному полі. Величина $-\vec{\nabla}V_p$ є силою тиску високочастотного поля (яку називають силою Міллера або пондеромоторною силою) на заряджену частинку. Вона діє в напрямку зменшення амплітуди поля. Потужні пучки електромагнітного випромінювання використовують для створення тиску і на макроскопічні об'єкти. Найчастіше – це частинки мікронних розмірів. Створюються так звані оптичні пінцети, які дають змогу маніпулювати невеликими частинками. Проте фізичний механізм такої взаємодії відрізняється від описаного вище.

3. Чи передається вільному електрону енергія квазімонохроматичного електромагнітного випромінювання, фаза якого випадково, але повільно (порівняно з частотою коливань) змінюється з часом?

Розв'язок

Запишемо електричне поле у такому вигляді:

$$E = E_x = E_0 \cos[\omega t - kz + \varphi(t)] \equiv \equiv \frac{1}{2} E_0 \left[e^{i[\omega t - kz + \varphi(t)]} + e^{-i[\omega t - kz + \varphi(t)]} \right] , \qquad (1)$$

де амплітуда поля $\vec{E}_0$ є дійсною величиною і не залежить від часу, а фаза $\varphi(t)$ також є дійсною функцією, але її величина випадковим чином змінюється з часом. Розв'язок рівняння руху (4), (задача **2)**, в якому поле хвилі вже залежить від величини фази, має вигляд:

$$p_x(t) = \frac{1}{2} e E_0 \int_{t_0}^{t} dt' \left[e^{i[\omega t' - kz + \varphi(t')]} + e^{-i[\omega t' - kz + \varphi(t')]} \right], \qquad (2)$$

де інтервал часу ($t - t_0$) значно більший не тільки від оберненої частоти $1/\omega$, а й від характерного часу зміни фази $\varphi(t)$ (рис. 6).

Як видно з рівняння (2), початкові умови для імпульсу такі ж, як і в попередній задачі:

$$p_x(t_0) = 0 .$$

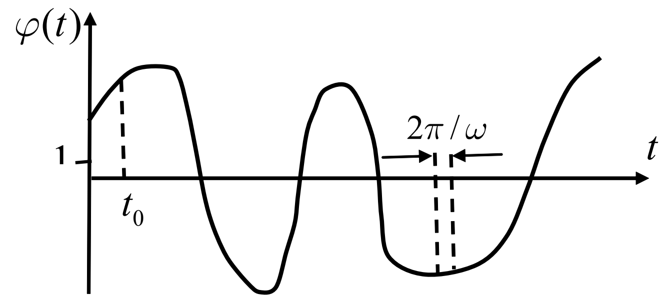

Рис. 6. Схематична залежність випадкової фази від часу

Знайдемо величину $p_x^2(t)$, яка визначається квадратом інтеграла у правій частині (2). Тоді, залишаючи тільки добутки експонент з різними знаками при i, одержимо:

$$p_x^2(t) = \frac{e^2 E_0^2}{4} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \left[e^{i\omega(t'-t'')} e^{i[\varphi(t') - \varphi(t'')]} + (c.c.) \right]. \qquad (3)$$

Усереднимо рівняння (3) по випадкових реалізаціях фази:

$$\left\langle p_x^2(t) \right\rangle = \frac{e^2 E_0^2}{4} \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \left[e^{i\omega(t'-t'')} \left\langle e^{i[\varphi(t') - \varphi(t'')]} \right\rangle + (c.c.) \right], \qquad (4)$$

де кутові дужки означають таке усереднення. Коли величина $\varphi(t)$ змінюється в широких межах (тобто, коли $\langle |\varphi(t)| \rangle >> 1$, як зображено на рис. 6), то основний внесок в інтеграл (4) дають тільки близькі значення t' і t'', за яких $\varphi(t')$ мало відрізняється від $\varphi(t'')$. Тоді різницю цих фаз можна записати у вигляді:

$$\varphi(t') - \varphi(t'') \approx \frac{\partial \varphi(t')}{\partial t'} (t' - t''). \qquad (5)$$

Зазначимо, що члени, якими ми знехтували в (3), містять у показниках експонент не різницю, а суму фаз, тому після усереднення по випадковій фазі внесок таких членів у $\left\langle p_x^2(t)\right\rangle$ дорівнює нулеві.

З врахуванням (5) інтеграл (4) зводиться до такого виразу:

$$\left\langle p_x^2(t)\right\rangle \approx \frac{e^2E_0^2}{4}\int_{t_0}^{t}dt'\left[\int_{t_0-t'}^{t-t'}d\tau e^{-i\omega\tau}\left\langle e^{-i\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(t')\tau}\right\rangle + (c.c.)\right], \quad (6)$$

де $\tau = t'' - t'$.

Вважаючи похідну $\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t} \equiv a$ випадковою гауссовою змінною, тобто величиною, ймовірність якої $P(a)$ задається нормальним розподілом

$$P(a) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\gamma}e^{-a^2/4\gamma^2}, \quad (7)$$

легко одержуємо

$$\left\langle e^{-i\frac{\partial}{\partial t'}\varphi(t')\tau}\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}daP(a)e^{-ia\tau} = e^{-\gamma^2\tau^2}. \quad (8)$$

Якщо $\gamma(t-t_0) >> 1$, то межі інтегрування по τ можна замінити на $\pm\infty$. Зазначимо, що таку заміну майже завжди використовують під час теоретичного опису флуктуаційних процесів з малими часами кореляції. Тоді у виразі (6) можна легко проінтегрувати по τ і t':

$$\left\langle p_x^2(t)\right\rangle \approx \frac{e^2E_0^2}{4}\int_{t_0}^{t}dt'\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[e^{-i\omega\tau-\gamma^2\tau^2} + (c.c.)\right] = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^2E_0^2}{\gamma}e^{-\omega^2/4\gamma^2}(t-t_0) \quad . \quad (9)$$

Як бачимо з (9), енергія електрона $\left\langle \frac{p_x^2}{2m_e}\right\rangle$ лінійно зростає з часом, що свідчить про відповідне зменшення енергії електромагнітого поля. Як і слід було очікувати, величина поглинання прямує до нуля, коли зникають флуктуації фази, тобто коли $\gamma \to 0$.

4. Умова така ж, як і в попередній задачі, за винятком того, що хаотичні зміни фази подібні до змін швидкості частинок під час броунівського руху (рис. 7).

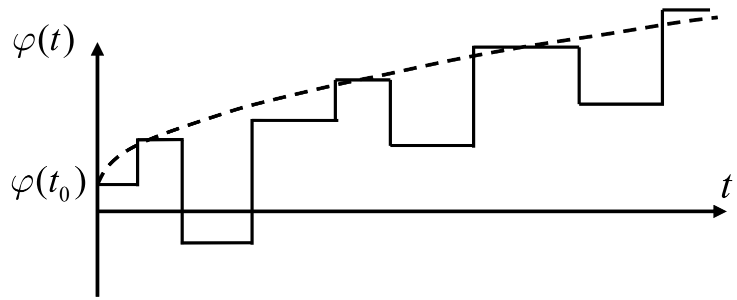

Рис. 7. Одна з можливих випадкових реалізацій залежності $\varphi(t)$, за якої зміни фази відбуваються стрибкоподібно

Розв'язок

На відміну від попередньої задачі, зміни фази відбуваються упродовж дуже короткого часу (майже миттєво), тому розкладати величину $\varphi(t') - \varphi(t'')$ за різницею часів $t' - t''$ є некоректним. Стрибкоподібну еволюцію фази, яку схематично зображено на рис. 7, можна описати рівнянням:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \sum_i F_i \delta(t - t_i), \qquad (1)$$

де випадкова величина F_i може з однаковою ймовірністю мати і додатні, і від'ємні значення.

Як і в попередній задачі, вважатимемо час спостереження ($t - t_0$) значно більшим від характерного часу між послідовними "стрибками" фази. Використовуючи рівняння (2) (задача **3)** і вважаючи, що немає кореляції між різними значеннями F_i, що еквівалентно гауссовій статистиці випадкової змінної F_i, можна легко знайти середнє значення експоненціального множника в підінтегральній функції виразу (4) (задача **3**):

$$\begin{aligned}&\left\langle \exp\left\{ i\left[\varphi(t) - \varphi(t')\right]\right\}\right\rangle = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\langle\left[\varphi(t) - \varphi(t')\right]^2\right\rangle\right\} = e^{-\nu|t-t'|}, \end{aligned} \qquad (2)$$

де ν визначається і середньоквадратичним значенням сили F_i, і тим, як часто ця сила з'являється. Оскільки кореляції поля загасають за час значно менший, ніж інтервал інтегрування $t - t_0$ ($\nu(t - t_0) \gg 1$), то з врахуванням виразу (4) в задачі **3** та рівняння (2) легко знаходимо:

$$\begin{aligned}\left\langle p_x^2(t)\right\rangle &= \frac{e^2E^2}{4}(t - t_0)\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left(e^{-i\omega\tau - \nu|\tau|} + c.c.\right) = \\ &= e^2E^2\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2}(t - t_0)\,. \end{aligned} \qquad (3)$$

Як і у випадку плавної зміни фази, енергія електрона зростає з часом за лінійним законом.

Розглянуті вище випадки взаємодії електрона з електромагнітним полем показують, що передача енергії монохроматичної хвилі електрону відсутня. Проте така передача наявна у важливому випадку скінченної спектральної ширини лінії. Величина ефекту істотно залежить від характеру флуктуацій фази (від параметрів γ та ν). Якщо випадкова фаза плавно змінюється з часом, то зменшення енергії поля визначається множником $\frac{1}{2\gamma}e^{-\omega^2/4\gamma^2}$. Якщо ж зміни фази стрибкоподібні, то зменшення енергії випромінювання можна описати функцією $\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2}$ (див. (3), задача **4**). У першому випадку залежність від частоти дуже сильна (має експоненціальний характер) і за малого значення параметра $\frac{4\gamma^2}{\omega^2}$ ефект стає неістотним. У другому – енергія, що передається, у випадку квазімонохроматичного випромінювання ($\omega >> \nu$) залежить від частоти як ω^{-2}. Така (степенева) залежність є плавною порівняно з першим випадком.

З проілюстрованих прикладів можна зробити висновок, що кореляційні характеристики електромагнітних полів можуть мати вирішальне значення в конкретних експериментальних ситуаціях. Це можуть бути і квантові кореляції (як в експерименті, де досліджували ймовірність попадання двох фотонів на різні детектори), і класичні (як в останніх задачах, де зростання з часом енергії електрона спостерігали лише внаслідок часткової хаотичності поля).

Далі розглядатимемо лише квантові кореляції.

W. E. Lamb, Jr. *Anti-photon.* – Appl. Phys., 1995. – B, **60**. – P. 77–84.

Значення фізичних констант, що використані у розділі

Заряд електрона:

$|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$ K(SI) $= 4,8 \cdot 10^{-10}$ одиниць CGSE.

Маса електрона:

$m_e = 9,1 \cdot 10^{-28}$ *г* (у 1836 разів менша від маси протона).

Стала Планка:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 1,0546 \cdot 10^{-27} \text{ерг} \cdot \text{с}.$$

Швидкість світла у вакуумі: $c = 299\ 792$ км/с.

Рекомендовані посібники

1. Л. Мандель, Э. Вольф. *Оптическая когерентность и квантовая оптика.* – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
2. М. О. Скалли, М. С. Зубайри. *Квантовая оптика*. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. W. P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space.* –WILEY-VCH, 2001.
4. D. F. Walls, G. J. Milburn. *Quantum Optics.* – Berlin: Springer, 1994.
5. W. H. Louisell. *Radiation and Noise in Quantum Electronics.* – NY: Huntington, 1977.
6. P. W. Milonni. *The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics*. – INC: Academic Press, 1994.
7. C. W. Gardiner, P. Zoller. *Quantum noise.* – Berlin: Springer, 2000.

2. Квантова теорія електромагнітного поля у вакуумі

2.1. Рівняння Максвелла та хвильове рівняння у вакуумі

Еволюцію електромагнітного поля в середовищі можна описати системою рівнянь Максвелла, які пов'язують електричні та магнітні поля з наявними струмами та зарядами.

Рівняння мають вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\times\vec{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\dfrac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \end{array}\right\}, \qquad (2.1)$$

де $\vec{j}$ та ρ – густини електричного струму та заряду; $\vec{D}$ та $\vec{B}$ – вектори електричної та магнітної індукції.

Векторний і скалярний добутки оператора $\vec{\nabla}$ з іншим вектором означають операції "rot" та "div", відповідно.

У випадку вакууму $\vec{D}=\vec{E}, \vec{B}=\vec{H}, \rho=0, \vec{j}=0$. Тоді систему рівнянь (2.1) перепишемо у простішому вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}\times\vec{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0 \end{array}\right\}. \qquad (2.2)$$

Діючи оператором ($\vec{\nabla}\times$) зліва на обидві частини другого рівняння системи (2.2) та враховуючи перше рівняння (2.2), одержимо

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\Delta\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \qquad (2.3)$$

де ми використали тотожність

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\Delta\vec{E}, \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Враховуючи третє рівняння (2.2), рівняння (2.3) можна переписати у вигляді:

$$\Delta\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \qquad (2.4)$$

Рівняння (2.4) називають хвильовим рівнянням. Аналогічно одержимо хвильове рівняння для магнітної складової електромагнітного поля, яке має такий самий вигляд, як і (2.4). Для нескінченного простору розв'язками хвильового рівняння є так звані "плоскі" хвилі:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \qquad (2.5)$$

де ω і $\vec{k}$ – частота і хвильовий вектор; $\omega\equiv\omega_{\vec{k}}=ck$.

Термін "плоскі" означає, що поверхня постійної фази, тобто геометричне місце точок, де $\vec{k}\vec{r}=\mathrm{const}$, є площина, перпендикулярна до хвильового вектора $\vec{k}$.

Третє рівняння системи (2.2) (рівняння Пуассона у вакуумі) накладає значні обмеження на можливі розв'язки.

Оскільки

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=i\vec{k}\cdot\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)},$$

то $\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=0$.

Це означає, що електричне поле є перпендикулярним до $\vec{k}$. Величину магнітного поля легко знаходимо з другого рівняння (2.2):

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\equiv\frac{\vec{k}\times\vec{E}_0}{k}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}.$$

Тут враховано, що

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}=i\vec{k}\times\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad k=\omega/c.$$

Оскільки поле $\vec{E}_0$ є перпендикулярним до вектора $\vec{k}$, то $E_0=H_0$, що й було використано нами раніше (див. задачу **2** з розділу 1).

Як бачимо, вектори $\vec{k}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ є взаємно перпендикулярними. Хвилі такого типу називають поперечними. Будь-яке електромагнітне поле у вакуумі можна подати у вигляді суперпозиції плоских хвиль.

Під час розв'язування хвильового рівняння для обмежених систем потрібно враховувати граничні умови. Далі знайдемо розв'язки для випадку, коли поле знаходиться у проміжку між двома плоско-паралельними металевими пластинами.

2.2. Спектр і поляризація власних коливань електромагнітного поля у проміжку між двома плоско-паралельними металевими пластинами

Для простоти вважатимемо, що пластини є необмежено великими, а матеріал, з якого вони зроблені, – ідеальний провідник, тобто його провідність є нескінченною. Рис. 8 пояснює геометрію системи.

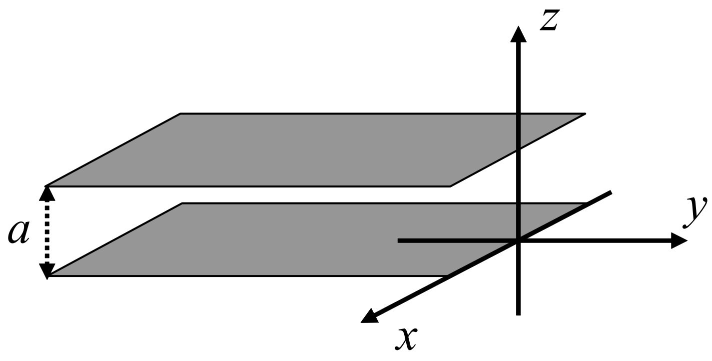

Рис. 8. Схематично зображено два фрагменти металевих поверхонь. Площі поверхонь S необмежено великі ($S \to \infty$)

Шукатимемо розв'язок рівняння (2.4) у вигляді:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z)e^{i(\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp - \omega t)}, \tag{2.6}$$

де $\vec{k}_\perp = \{k_x, k_y, 0\}$, $\vec{r}_\perp = \{x, y, 0\}$.

Тоді хвильове рівняння зводиться до такого:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2\right)\vec{E} \,. \tag{2.7}$$

Як видно з (2.7), рівняння для усіх компонент поля $\vec{E}$ є однакові, але граничні умови для різних компонент різні. Зокрема електричне поле $\vec{E}_\perp = \left\{E_x, E_y, 0\right\}$ дорівнює нулеві поблизу поверхонь, оскільки наявність поля у поверхневому шарі провідника призвела б до нескінченно великого струму в цій ділянці.

Отже,

$$E_{x,y}(z = 0, a) = 0 \,. \tag{2.8}$$

Рівняння Пуассона встановлює зв'язок між різними компонентами поля

$$i\vec{k}_\perp \vec{E}_\perp + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \,, \tag{2.9}$$

з якого знаходимо граничні умови для компоненти E_z :

$$\frac{\partial E_z(z = 0, a)}{\partial z} = 0 \,. \tag{2.10}$$

З рівняння (2.7) можна знайти явну залежність поля $\vec{E}_\perp$ від координати z .

Запишемо її у вигляді:

$$\vec{E}_\perp(z) = \vec{C}_1 e^{i\kappa z} + \vec{C}_2 e^{-i\kappa z} \,, \tag{2.11}$$

де вектори $\vec{C}_{1,2}$ є перпендикулярними до осі z , а

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2 \text{ або } \omega^2 = c^2\left(\kappa^2 + k_\perp^2\right).$$

Граничні умови (2.8) задовольняються, коли

$$\begin{aligned} &\vec{C}_1 + \vec{C}_2 = 0 \\ &\vec{C}_1 e^{i\kappa a} + \vec{C}_2 e^{-i\kappa a} = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Нетривіальні розв'язки (2.12) існують лише тоді, коли $\sin \kappa a = 0$, тобто коли $\kappa = \dfrac{\pi n}{a}$, $n = 1, 2, ...$

У результаті одержуємо:

$$\vec{E}_\perp(z) = 2i\vec{C}_1 \sin\left(\frac{\pi n}{a} z\right). \tag{2.13}$$

Аналогічно знаходимо поле в напрямку z :

$$E_z(z) = C\cos\left(\frac{\pi n}{a} z\right). \tag{2.14}$$

Розв’язок (2.14) задовольняє граничні умови (2.10) для поля E_z. Коефіцієнти $\vec{C}_1$ і C пов’язані між собою рівнянням Пуассона, з якого одержуємо

$$\vec{k}_\perp \cdot \vec{C}_1 = -\frac{\pi n}{2a} C\,. \tag{2.15}$$

Не обмежуючи загальності розгляду, вважатимемо, що вісь x перпендикулярна до вектора $\vec{k}_\perp$. Тоді вісь y буде паралельною до $\vec{k}_\perp$ і співвідношення (2.15) можна переписати у вигляді:

$$kC_{1y} = -\frac{\pi n}{2a} C\,, \tag{2.16}$$

де $k \equiv k_\perp$.

Із врахуванням формул (2.6), (2.13), (2.14) і (2.16) загальний вираз для електричного поля у проміжку між пластинами матиме вигляд:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \\ = \left[\left(\vec{e}_x E_x^0 + \vec{e}_y E_y^0\right)\sin\left(\frac{\pi n}{a} z\right) + i\vec{e}_z E_y^0 \frac{ka}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi n}{a} z\right)\right] e^{i(\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp - \omega t)} \tag{2.17}$$

Тут E_x^0 та E_y^0 – дві незалежні константи, що визначають амплітуди двох незалежних хвиль (мод).

Інакше кажучи, для кожного набору величин $\{k,n\}$ існують дві незалежні хвилі. Частоти коливань хвиль та числа k, n пов’язані співвідношенням:

$$\omega^2 = c^2\left(k^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}\right). \tag{2.18}$$

Із рівняння (2.18) можна побачити, що фазова швидкість хвилі $|\omega/k|$ більша від швидкості світла, а групова $|\partial\omega/\partial k|$ – менша.

Магнітне поле хвилі не є незалежною величиною, оскільки за другим рівнянням Максвелла (2.2) всі його компоненти можна виразити через $\vec{E}$:

$$\vec{H} = -i\frac{c}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{E}\,, \tag{2.19}$$

де $\vec{E}$ задається формулою (2.17).

2.3. Квантування електромагнітного поля у резонаторі

З наведеного розв’язку видно, що коливання електричного поля у напрямку осі x не залежать від наявності інших компонент. На рис. 9 схематично зображена залежність електричного поля від координати z.

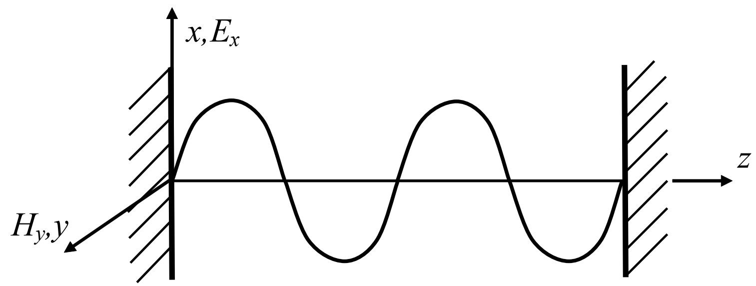

Рис. 9. Просторова залежність електричного поля $E_x(z)$ для випадку $n = 4$. На металевих поверхнях знаходяться вузлові точки. Магнітне поле направлене вздовж осі y

Для простоти розглянемо випадок, коли $k=0$. Тоді поле E_x можна записати як суперпозицію стоячих хвиль

$$E_x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n q_n(t)\sin\kappa_n z,\quad \kappa_n=\frac{\pi n}{a}. \tag{2.20}$$

Просторова залежність окремих мод електричного поля визначається функціями $\sin(\kappa_n z)$, а часова – коефіцієнтами $q_n(t)$. Як бачимо, в такій постановці задача звелась до знаходження поля в одновимірному резонаторі. Наявність у резонаторі змінного електричного поля свідчить про те, що в ньому має бути і магнітне поле $\vec{H}$. Величину останнього можна виразити через значення електричного поля (тобто через E_x), використовуючи перше з рівнянь (2.2).

Оскільки відмінною від нуля є лише складова електричного поля, орієнтована вздовж осі x (і яка залежить тільки від z-ої координати), то з означення ($\vec{\nabla}\times$) випливає, що тільки компонента H_y не дорівнює нулеві, до того ж

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}. \tag{2.21}$$

Проінтегрувавши по z, маємо:

$$H_y(z,t)=\sum_n A_n\frac{\dot{q}_n(t)}{c\kappa_n}\cos(\kappa_n z). \tag{2.22}$$

Формули (2.20) та (2.22) задають електромагнітне поле у резонаторі. Повну його енергію можна знайти після інтегрування по об'єму системи V:

$$\mathrm{E}=\frac{1}{8\pi}\int dV\left(E^2+H^2\right)=\frac{V}{16\pi}\sum_n\left(A_n^2\frac{\dot{q}_n^2}{c^2\kappa_n^2}+A_n^2q_n^2\right). \tag{2.23}$$

Вираз після останнього знаку рівності можна інтерпретувати як суму енергій незалежних осциляторів. Осцилятори нумерують індексом n. Щоб зробити аналогію між енергією поля та енергією набору осциляторів, очевиднішою, константи, що входять до рівняння (2.23), замінюють на звичніші, а саме:

$$c\kappa_n=\omega_n,\quad \frac{VA_n^2}{8\pi\omega_n^2}=m_n. \tag{2.24}$$

Тоді вираз (2.23) набуває вигляду:

$$\mathrm{E}=\sum_n\frac{1}{2}\left(m_n\dot{q}_n^2+m_n\omega_n^2q_n^2\right), \tag{2.25}$$

в якому m_n та ω_n мають фізичний зміст “маси” та “частоти” n-го осцилятора. Перший член у дужках (2.25) визначає кінетичну енергію n-го осцилятора $T_n=\frac{m_n}{2}\dot{q}_n^2$, а другий – потенціальну $U_n=\frac{m_n\omega_n^2}{2}q_n^2$. Тоді функція Лагранжа n-го осцилятора дорівнює

$$L_n=T_n-U_n, \tag{2.26}$$

а узагальнений імпульс p_n (канонічно спряжений координаті q_n):

$$p_n=\frac{\partial L_n}{\partial\dot{q}_n}=m_n\dot{q}_n. \tag{2.27}$$

Гамільтоніан системи $\mathrm{H}=\sum_n p_n\dot{q}_n-L$, виражений через канонічні змінні $\{q_n,p_n\}$, має вигляд:

$$\mathrm{H}=\sum_n\frac{1}{2}\left(\frac{p_n^2}{m_n}+m_n\omega_n^2q_n^2\right) \tag{2.28}$$

і дорівнює енергії системи E. Перехід до квантово-механічного опису здійснюється шляхом заміни кожної пари канонічно спряжених фізичних величин $\{q_n, p_n\}$ на відповідні оператори $\{\hat{q}_n, \hat{p}_n\}$ та накладанням на них комутаційних співвідношень:

$$\hat{q}_n \hat{p}_{n'} - \hat{p}_{n'} \hat{q}_n = \left[\hat{q}_n, \hat{p}_{n'}\right] = i\hbar\delta_{n,n'} . \qquad (2.29)$$

Символ Кронекера відображає ту обставину, що змінні різних осциляторів не залежать одна від одної і тому комутують між собою.

У координатному представленні оператор імпульсу $\hat{p}_n$ має вигляд:

$$\hat{p}_n = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_n} . \qquad (2.30)$$

За такого визначення $\hat{p}_n$ виконується співвідношення (2.29). Часто замість операторів $\{\hat{q}_n, \hat{p}_n\}$ використовують інші, зручніші для багатьох задач оператори $\hat{a}_n, \hat{a}_n^+$:

$$\hat{a}_n = e^{i\omega_n t} \frac{m_n\omega_n\hat{q}_n + i\hat{p}_n}{(2m_n\hbar\omega_n)^{1/2}}, \qquad (2.31)$$

$$\hat{a}_n^+ = e^{-i\omega_n t} \frac{m_n\omega_n\hat{q}_n - i\hat{p}_n}{(2m_n\hbar\omega_n)^{1/2}} . \qquad (2.32)$$

Використовуючи вираз (2.30), легко знаходимо:

$$\left[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^+\right] = \delta_{n,n'}, \quad \left[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}\right] = \left[\hat{a}_n^+, \hat{a}_{n'}^+\right] = 0 . \qquad (2.33)$$

Гамільтоніан та обидва поля E_x, H_y набувають вигляду:

$$\mathrm{H} = \sum_n \hbar\omega_n \left(\hat{a}_n^+ \hat{a}_n + \frac{1}{2}\right), \qquad (2.34)$$

$$\left.\begin{aligned} E_x(z,t) &= \sum_n \mathrm{E}_n \left(\hat{a}_n e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_n^+ e^{i\omega_n t}\right) \sin(\kappa_n z) \\ H_y(z,t) &= -i\sum_n \mathrm{E}_n \left(\hat{a}_n e^{-i\omega_n t} - \hat{a}_n^+ e^{i\omega_n t}\right) \cos(\kappa_n z) \end{aligned}\right\}, \qquad (2.35)$$

де $\mathrm{E}_n = (4\pi\hbar\omega_n / V)^{1/2}$.

2.4. Тривимірний випадок

Описана вище схема квантування електромагнітного поля стосується одновимірного випадку, коли поле, замкнене в резонаторі, існує як суперпозиція стоячих хвиль (див. (2.20), (2.22)).

Значно цікавішим є тривимірний випадок, коли розміри системи великі і вплив граничних умов на конфігурацію мод не має великого значення під час знаходження поля в невеликих об'ємах.

Найпоширенішим є такий спосіб опису електромагнітних полів. Розглядають фізичну систему, що розміщена в об'ємі V ($V = L_x L_y L_z$, де L_x, L_y, L_z – її розміри в напрямках x, y, z). Величина V може бути як завгодно великою, а для полів виконуються умови періодичності, тобто

$$\begin{aligned} &\vec{E}(\vec{r} + \vec{e}_x L_x) = \vec{E}(\vec{r}),\ \vec{E}(\vec{r} + \vec{e}_y L_y) = \\ &= \vec{E}(\vec{r}),\ \vec{E}(\vec{r} + \vec{e}_z L_z) = \vec{E}(\vec{r}) \end{aligned} . \qquad (2.36)$$

Тоді розв'язками хвильового рівняння будуть плоскі хвилі ($\mathrm{const} \cdot \exp(i\vec{k}\vec{r})$), де хвильовий вектор має такі дискретні значення

$$k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L_{x,y,z}} n_{x,y,z}, \quad n_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad (2.37)$$

Електричне поле є суперпозицією плоских хвиль

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k},s}\mathrm{E}_{\vec{k}}\vec{e}_{\vec{k}}^{\,s}\alpha_{\vec{k},s}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)}+c.c., \tag{2.38}$$

де $s=1,2$ вказує на дві взаємно перпендикулярні поляризації хвиль із заданим $\vec{k}$, $\vec{e}_{\vec{k}}^{\,s}$ – одиничний вектор уздовж напрямку поляризації хвилі ($\vec{e}_{\vec{k}}^{\,s}\perp\vec{k}$). Останні нумеруватимемо набором значень $\{\vec{k},s\}$.

Магнітне поле виражається через такі ж змінні, як і електричне. Щоб записати його у явному вигляді, використаємо друге рівняння Максвелла

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Враховуючи, що $\vec{\nabla}\times\vec{e}_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\vec{r}}=i\vec{k}\times\vec{e}_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\vec{r}}$, одержимо:

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{k},s}\mathrm{E}_{\vec{k}}\frac{\vec{k}\times\vec{e}_{\vec{k}}^{\,s}}{k}\alpha_{\vec{k},s}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_{\vec{k}}t)}+c.c. \tag{2.39}$$

Щоб перейти до квантовомеханічного опису, замінимо класичні величини $\alpha_{\vec{k}s},\alpha_{\vec{k}s}^{*}$ на оператори $\hat{a}_{\vec{k}s},\hat{a}_{\vec{k}s}^{+}$. Комутаційні співвідношення для нових операторів $\hat{a}_{\vec{k}s}$, $\hat{a}_{\vec{k}s}^{+}$ знаходять аналогічно як для одновимірного випадку. Вони мають вигляд:

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}s},\hat{a}_{\vec{k}'s'}^{+}\right]=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{s,s'}. \tag{2.40}$$

Коефіцієнти $\mathrm{E}_{\vec{k}}$ знайдемо з умови, що повний гамільтоніан є сумою гамільтоніанів незалежних осциляторів. Записуючи його у вигляді, подібному до виразу (2.34)

$$\begin{aligned}\mathrm{H}&=\frac{1}{8\pi}\int dV\left(\hat{E}^2+\hat{H}^2\right)=\\&=\sum_{\vec{k}s}\hbar\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}_{\vec{k}s}^{+}\hat{a}_{\vec{k}s}+\frac{1}{2}\right)\end{aligned}, \tag{2.41}$$

одержимо:

$$\mathrm{E}_{\vec{k}}=\left(2\pi\hbar\omega_k/V\right)^{1/2}.$$

Пару операторів $\hat{a}_{\vec{k}s}$, $\hat{a}_{\vec{k}s}^{+}$ можна пов'язати з операторами координати та імпульса $\hat{q}_{\vec{k},s}$, $\hat{p}_{\vec{k},s}$ відповідних осциляторів за допомогою співвідношень

$$\hat{a}_{\vec{k},s}=\frac{m_{\vec{k},s}\omega_{\vec{k},s}\hat{q}_{\vec{k},s}+i\hat{p}_{\vec{k},s}}{\left(2m_{\vec{k},s}\hbar\omega_{\vec{k},s}\right)^{1/2}},$$

$$\hat{a}_{\vec{k},s}^{+}=\frac{m_{\vec{k},s}\omega_{\vec{k},s}\hat{q}_{\vec{k},s}-i\hat{p}_{\vec{k},s}}{\left(2m_{\vec{k},s}\hbar\omega_{\vec{k},s}\right)^{1/2}}, \tag{2.42}$$

аналогічно як у рівняннях (2.31), (2.32). Зазвичай, значення координати та імпульсу задають у такій системі одиниць, де "маса" $m_{\vec{k},s}$ дорівнює одиниці. При цьому змінюються координати та імпульси осциляторів. Оператори $\hat{q}_{\vec{k},s}$ та $\hat{p}_{\vec{k},s}$ замінюються на $\hat{p}'_{\vec{k},s}=\hat{p}_{\vec{k},s}\big/\sqrt{m_{\vec{k},s}}$ та $\hat{q}'_{\vec{k},s}=\hat{q}_{\vec{k},s}\sqrt{m_{\vec{k},s}}$. Легко переконатись, що величина комутатора $\left[\hat{q}'_{\vec{k},s},\hat{p}'_{\vec{k},s}\right]$ залишається такою ж, як і для старих змінних, тобто дорівнює $i\hbar$.

Коли розміри системи необмежено зростають, то сума $\sum_{\vec{k}}$ переходить в інтеграл. Зокрема

$$\sum_{k_x} = \frac{L_x}{2\pi}\sum_{k_x}\Delta k_x \to \frac{L_x}{2\pi}\int dk_x\,,$$

де використано те, що інтервал дискретності k_x (Δk_x) дорівнює $\frac{2\pi}{L_x}$ і прямує до нуля зі збільшенням L_x.

Аналогічні міркування стосуються решти компонент вектора $\vec{k}$. У результаті одержимо

$$\sum_{\vec{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k} \qquad (2.43)$$

де $d\vec{k} \equiv dk_x dk_y dk_z$.

Коли під знаком суми стоїть функція $f(\vec{k})$, яка не залежить ні від напрямку поширення хвилі $\vec{k}$, ні від її поляризації s, то

$$\begin{aligned}\sum_{\vec{k}s} f(k) &= \frac{2V}{(2\pi)^3}\int dk k^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(k) = \\ &= \frac{V}{\pi^2}\int dk k^2 f(k)\end{aligned}\,, \qquad (2.44)$$

де сума по s врахована появою коефіцієнта 2 перед першим інтегралом; θ – кут між вектором $\vec{k}$ та віссю z, яка може бути орієнтованою у будь-якому напрямку; φ – азимутальний кут (рис. 10).

Часто інтегрування по k замінюють інтегруванням по частотах. Тоді, враховуючи, що $\omega = ck, dk = d\omega / c$, вираз (2.44) можна переписати у вигляді:

$$\sum_{\vec{k}s} f(k) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int d\omega\omega^2 f\left(\frac{\omega}{c}\right) \equiv \int d\omega D(\omega) f\left(\frac{\omega}{c}\right), \qquad (2.45)$$

де величину $D(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$ можна інтерпретувати як спектральну густину станів.

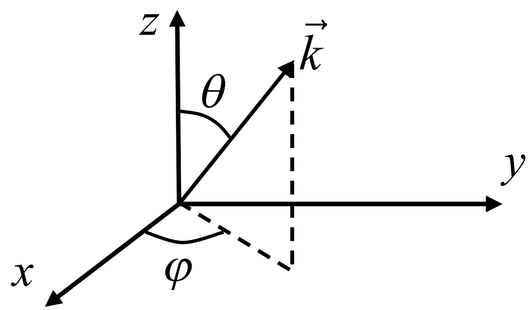

Рис. 10. Дивіться пояснення в тексті

2.5. Комутаційні співвідношення між полями

Після переходу до квантовомеханічного опису електричні та магнітні поля стають операторними величинами, оскільки вони виражаються лінійно через оператори $a_{\vec{k}s}, a^+_{\vec{k}s}$:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \sum_{\vec{k},s} \mathrm{E}_{\vec{k}} \vec{e}^{\,s}_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + a^+_{\vec{k},s} e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right], \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \sum_{\vec{k},s} \mathrm{E}_{\vec{k}} \frac{\vec{k}\times\vec{e}^{\,s}_{\vec{k}}}{k}\left[a_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + a^+_{\vec{k},s} e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right].\end{aligned} \qquad (2.46)$$

Тут і далі, де не виникатиме непорозумінь, ми не ставитимемо позначку (^) над операторними величинами.

Використовуючи значення комутатора (2.40), знайдемо комутатор полів в один і той же момент часу t, але в різних точках простору $\vec r, \vec r'$. Легко показати, що електричні поля (як і магнітні) комутують між собою. Наприклад, у випадку електричних полів

$$\left[E_x(\vec r), E_y(\vec r')\right] = \sum_{\vec k s} \mathrm{E}_k^2 e^s_{\vec k x} e^s_{\vec k y}\left(e^{i\vec k(\vec r-\vec r')} - e^{-i\vec k(\vec r-\vec r')}\right) \qquad (2.47)$$

комутатор дорівнює нулеві, оскільки сума $\sum_s e^s_{\vec k x} e^s_{\vec k y}$ не залежить від вибору орієнтації пари векторів поляризації $\vec e^{\,1,2}_{\vec k}$ і до того ж не змінюється, коли $\vec k$ змінює знак (див. задачу **3**).

Водночас комутатор $\left[E_x(\vec r), H_y(\vec r')\right]$ відмінний від нуля. Знайдемо його величину:

$$\begin{aligned}&\left[E_x(\vec r), H_y(\vec r')\right] = \\ &= \sum_{\vec k s} \mathrm{E}_k^2 e^s_{\vec k x} \frac{\left(\vec k \times e^s_{\vec k}\right)_y}{k}\left(e^{i\vec k(\vec r-\vec r')} - e^{-i\vec k(\vec r-\vec r')}\right).\end{aligned} \qquad (2.48)$$

Права частина рівняння (2.48) подібна до (2.47), але не дорівнює нулеві. Далі під час знаходження суми по s використаємо позначення: $\vec e_{\vec k} \equiv \vec k / k$.

Враховуючи, що для кожного значення $\vec k$ є лише дві хвилі з різними поляризаціями, нумеруватимемо їх цифрами 1, 2. До того ж, не обмежуючи загальності розгляду, припустимо, що три вектори $\vec e^{\,1}_{\vec k}$, $\vec e^{\,2}_{\vec k}$, $\vec e_{\vec k}$ орієнтовані так, як зображено на рис. 11.

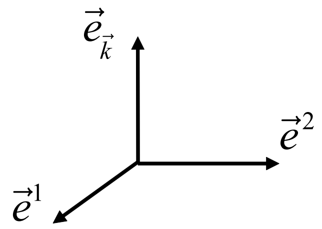

Рис. 11. Тут $\vec e^{\,1} \equiv \vec e^{\,1}_{\vec k}, \vec e^{\,2} \equiv \vec e^{\,2}_{\vec k}$ (див. текст)

Тоді сума по s для кожного значення $\vec k$ дорівнює:

$$\begin{aligned}&\sum_s e^s_{\vec k x} \frac{\left(\vec k \times e^s_{\vec k}\right)_y}{k} = e^1_x(\vec e_{\vec k} \times \vec e^{\,1})_y + e^2_x(\vec e_{\vec k} \times \vec e^{\,2})_y = \\ &= e^1_x e^2_y - e^2_x e^1_y = e_{\vec k z} = \frac{k_z}{k}\end{aligned}, \qquad (2.49)$$

де ми використали співвідношення:

$$\vec e^{\,1} \times \vec e^{\,2} = \vec e_{\vec k}, \;\; \vec e_{\vec k} \times \vec e^{\,1} = \vec e^{\,2}, \;\; \vec e_{\vec k} \times \vec e^{\,2} = -\vec e^{\,1}.$$

Після підстановки (2.49), а також явного виразу для E_k^2 у (2.48), одержимо:

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi}{V}\hbar c \sum_{\vec k} k_z\left(e^{i\vec k(\vec r-\vec r')} - e^{-i\vec k(\vec r-\vec r')}\right) = \\ &= -i4\pi\hbar c \frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec r - \vec r')\end{aligned}. \qquad (2.50)$$

Отже, комутатор полів E_x та H_y дорівнює:

$$\left[E_x(\vec r, t), H_y(\vec r', t)\right] = -i2hc\frac{\partial}{\partial z}\delta(\vec r - \vec r'). \qquad (2.51)$$

Комутатори інших компонент полів можна знайти, виконуючи в (2.51) циклічну перестановку координат x, y, z.

Така процедура означає всього лише перепозначення осей координат, за якої їхня взаємна орієнтація залишається незмінною.

На відміну від операторів полів їх комутатор вже не є оператором. Комутатор, як і слід очікувати, дорівнює нулеві, коли припустити, що $\hbar = 0$. Важко дати фізичну інтерпретацію виразу (2.51) хоча б тому, що він є сингулярною і до того ж уявною величиною. Проте можна стверджувати, що відмінність від нуля комутатора (2.51) означає, що між фізичними величинами E_x та H_y існує додаткова (квантова) кореляція. Зокрема, середні значення добутку полів залежать від порядку їхнього розташування, оскільки $\left\langle E_x H_y \right\rangle \neq \left\langle H_y E_x \right\rangle$. Останнє співвідношення означає, що результат вимірювання добутку вказаних фізичних величин залежить від того, яка з них вимірюється (тобто взаємодіє з вимірювальним пристроєм) першою.

Наявність квантової кореляції між полями перестає бути загадковою, якщо вважати, що електричні та магнітні поля породжуються одними і тими ж квантовими об’єктами – зарядженими частинками. Магнітне поле виникає внаслідок руху частинок, а електричне (його поздовжня складова) – наявністю заряду. Якщо існує квантова кореляція між координатами та імпульсами частинок (аналогічна кореляції змінних осцилятора (2.29)), то цілком логічним є те, що квантові властивості заряджених частинок передаються (нав’язуються) і електромагнітному полю.

Зазначимо, що величини полів (що визначаються концентрацією частинок, швидкостями їхнього руху, відстанню генеруючої ділянки до вимірювального пристрою тощо) не впливають на зроблений висновок, оскільки комутатор (2.51) не залежить від амплітуд полів. Він залишається незмінним навіть тоді, коли ці величини є нескінченно малими (звичайно, в класичному, тобто неквантовому розумінні).

Процедуру знаходження величини комутатора, яку описано вище, можна використати для полів, заданих у різні моменти часу t, t'. У цьому випадку під час проведення обчислень в експоненціальних множниках у формулі (2.48) треба замінити $i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')$ на $i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - i\omega_{\vec{k}}(t-t')$.

2.6. Фоківські стани або представлення чисел заповнення

Енергія кожної моди $(\vec{k}, s)$ відповідає енергії відповідного квантового осцилятора, частота коливань якого дорівнює $\omega_{k,s}$. Як відомо, квантовий осцилятор, на відміну від класичного, має дискретний енергетичний спектр. Далі розглянемо тільки одну моду і не вказуватимемо, якому набору величин $(\vec{k}, s)$ вона відповідає. Кожен стаціонарний стан системи характеризується власним значенням гамільтоніана (енергією системи) E_n та власною функцією $\left| n \right\rangle$. Вони знаходяться з розв’язку рівняння Шредінгера:

$$\mathrm{H}\left| n \right\rangle = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\left| n \right\rangle = E_n \left| n \right\rangle. \qquad (2.52)$$

Подіємо на кожен з виразів (2.52) оператором a (зліва). Використовуючи тотожність

$$aa^+ a = a^+ aa + a, \qquad (2.53)$$

одержимо

$$\mathrm{H}a\left| n \right\rangle = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)a\left| n \right\rangle = (E_n - \hbar\omega)a\left| n \right\rangle, \qquad (2.54)$$

тобто

$$\mathrm{H}a|n\rangle = (E_n - \hbar\omega)a|n\rangle . \qquad (2.55)$$

Як видно з (2.55), функція $a|n\rangle$ також є власною функцією гамільтоніана H, але з меншим власним значенням, а саме:

$$E_n - \hbar\omega .$$

Позначимо власну функцію (нормовану на одиницю), що відповідає такому значенню енергії E_{n-1},

де
$$E_{n-1} \equiv E_n - \hbar\omega , \qquad (2.56)$$

символом $|n-1\rangle$. Вона може відрізнятись від $a|n\rangle$ на якийсь постійний множник $1/\alpha_n$, а саме:

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\alpha_n} a|n\rangle . \qquad (2.57)$$

З умови нормування хвильової функції

$$\langle n-1|n-1\rangle = 1 ,$$

де $< n-1| = \frac{1}{\alpha_n^*} < n| a^+$,

та з врахуванням рівняння (2.52) одержимо:

$$\frac{1}{|\alpha_n|^2}\langle n|a^+a|n\rangle = \frac{E_n - \hbar\omega/2}{\hbar\omega|\alpha_n|^2} = 1 . \qquad (2.58)$$

З рівняння (2.58) можна знайти значення $|\alpha_n|$, коли відома енергія E_n. Щоб знайти останню, діятимемо знову й знову оператором a на рівняння Шредінгера. Зрештою ми дійдемо до найнижчого стану E_0, в якому, як відомо, енергія осцилятора дорівнює

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega . \qquad (2.59)$$

Позначимо хвильову функцію найнижчого стану символом $|0\rangle$. Очевидно, що $a|0\rangle = 0$ (в іншому разі існував би стан з від'ємною енергією). Тоді можна записати:

$$E_1 = E_0 + \hbar\omega = \hbar\omega\left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$E_2 = E_0 + 2\hbar\omega = \hbar\omega\left(2 + \frac{1}{2}\right), \ldots$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \qquad (2.60)$$

Коли спектр можна задати рівнянням (2.60), то з (2.52) одержимо:

$$a^+a|n\rangle = n|n\rangle , \qquad (2.61)$$

де оператор $a^+a \equiv \hat{n}$ називають оператором кількості частинок (фотонів).

Як бачимо, функція $|n\rangle$ є власною функцією не тільки гамільтоніана, а й оператора кількості частинок. Використовуючи (2.60) (або (2.61)) та (2.58), знайдемо константу α_n. Вона дорівнює $\sqrt{n}$. Тоді з умови

$$a|n\rangle = \alpha_n|n-1\rangle \qquad (2.62)$$

одержимо результат дії оператора a на власну функцію $|n\rangle$:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle . \qquad (2.63)$$

Аналогічне співвідношення, яке визначає результат дії оператора a^+ на хвильову функцію $|n\rangle$, одержимо, використовуючи формули (2.61) та (2.62):

$$\sqrt{n}a^{+}|n-1\rangle = n|n\rangle . \qquad (2.64)$$

Після заміни n на ($n+1$), рівняння (2.64) перепишемо у вигляді:

$$a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle . \qquad (2.65)$$

Враховуючи вирази (2.63) та (2.65), оператори a^{+} та a можна інтерпретувати як такі, що відповідно “народжують” та “знищують” квант енергії електромагнітного поля (фотон), величина якого дорівнює $\hbar\omega$.

Для всього електромагнітного поля оператор повної кількості фотонів $\hat{N}$ має вигляд:

$$\hat{N} = \sum_{\vec{k},s} a^{+}_{\vec{k},s} a_{\vec{k},s} . \qquad (2.66)$$

Тут кожний доданок є оператором кількості частинок у відповідній моді. Легко побачити, що $\hat{N}$ комутує з гамільтоніаном (2.41). Очевидно, що середня кількість фотонів у системі з заданою хвильовою функцією $|\psi\rangle$ дорівнює $\langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle$. Коли ж хвильова функція є власною функцією оператора $\hat{N}$, то відповідне власне значення дорівнює кількості фотонів, що знаходяться у цьому стані.

Вектори $|n\rangle$ та $\langle n|$ можна записати як результат n -кратної дії операторів a^{+}, a на вакуумний стан $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{(a^{+})^{n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle , \ \langle n| = \langle 0|\frac{a^{n}}{\sqrt{n!}} , \qquad (2.67)$$

де значення знаменників знайдено з умови нормування функцій $|n\rangle$ та $\langle n|$. Перший вираз у (2.67) описує стан n -кратно збудженої моди, тобто стан поля, в якому є n фотонів. Другий – одержано з першого за допомогою операції ермітового спряження.

Стани $|n\rangle$ називають фоківськими. Вони утворюють повну систему взаємно ортогональних функцій. Умова повноти має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 ,$$

а ортогональності – $\langle n|k\rangle = \delta_{n,k}$. Під час теоретичного аналізу або конкретних розрахунків фоківські стани часто використовують як базис. Зокрема квантовий стан ψ окремої моди завжди можна записати у вигляді суперпозиції фоківських станів:

$$\psi = \sum_{n} c_{n}|n\rangle . \qquad (2.68)$$

Наприкінці параграфу наведемо очевидні співвідношення:

$$\langle n|a|n\rangle = 0, \ \langle n|a^{+}|n\rangle = 0 , \qquad (2.69)$$

які є наслідком ортогональності фоківських станів. Ми використаємо їх далі.

2.7. Теплове випромінювання

Розглядаючи фотони у вакуумі як ідеальний газ, можна, використовуючи принципи статистичної механіки, знайти загальні характеристики такого газу. В історичному плані першими були досліджені властивості рівноважного газу фотонів. Оскільки в нашому розгляді фотон-фотонна взаємодія відсутня, а діелектрична проникність вакууму дорівнює одиниці, то рівноважність фотонного газу може забезпечуватись його взаємодією з речовиною, наприклад, зі стінками резервуару, в якому знаходиться випромінювання. Проте така взаємодія має бути слабкою, оскільки в протилежному випадку газ не можна вважати близьким до ідеального.

Стінки вважають абсолютно чорним тілом, якщо вони повністю поглинають випромінювання, що на них падає. Тоді у стані термодинамічної рівноваги світлова енергія, що поглинається за одиницю часу, дорівнює енергії, що випромінюється за цей же час. Рівноважний стан фотонної підсистеми описується статистичним оператором ρ

$$\rho = Ce^{-\mathrm{H}/T}, \tag{2.70}$$

де T – абсолютна температура в енергетичних одиницях, тобто температура в градусах, помножена на постійну Больцмана k_B; C – константа нормування, значення якої дорівнює $\left[sp\left(e^{-\mathrm{H}/T}\right)\right]^{-1}$.

Вираз (2.70) відповідає канонічному розподілу, який використано, попри те, що кількість фотонів є змінною величиною. Взагалі кажучи, системи зі змінною кількістю частинок описуються великим канонічним розподілом, який можна одержати із (2.70) формальною заміною H на $\mathrm{H} - \mu\hat{N}$, де $\hat{N}$ – оператор повної кількості фотонів, а μ – хімічний потенціал системи. Хімічний потенціал, який дорівнює похідній від вільної енергії фотонного газу F по середній кількості частинок ($\partial F / \partial N$) за заданих значень температури та об'єму, дорівнює нулеві, оскільки саме у цьому випадку вільна енергія є мінімальною. Тому для фотонів вираз (2.70) є обґрунтованим.

Оператори різних мод комутують між собою, тому статистичні властивості окремих мод можна описувати незалежно.

Для моди $(\vec{k}, s)$ статистичний оператор має вигляд:

$$\rho_{\vec{k},s} = C\exp\left\{-\frac{\hbar\omega_k}{T}\left(\hat{n}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2}\right)\right\}. \tag{2.71}$$

Після очевидного перепозначення константи C вираз (2.71) перепишемо у простішому вигляді:

$$\rho_{\vec{k},s} = C\exp\left\{-\frac{\hbar\omega_k}{T}\hat{n}_{\vec{k},s}\right\}. \tag{2.72}$$

Середня кількість фотонів з частотою $\omega_{\vec{k}}$ та поляризацією s дорівнює:

$$\left\langle \hat{n}_{\vec{k}s} \right\rangle = sp\left(\rho\hat{n}_{\vec{k}s}\right). \tag{2.73}$$

Знову, опускаючи індекси $(\vec{k}, s)$, запишемо (2.73) у вигляді:

$$\left\langle \hat{n} \right\rangle = sp\left(\rho\hat{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\langle n \middle| \rho\hat{n} \middle| n \right\rangle =$$

$$= C\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n} n = -C\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{C} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\ln C, \tag{2.74}$$

де

$$C = \left(\sum_{n} e^{-\alpha n}\right)^{-1} = 1 - e^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{\hbar\omega}{T}. \tag{2.75}$$

Враховуючи співвідношення (2.75), значення $\left\langle \hat{n} \right\rangle$ набуває вигляду:

$$\left\langle \hat{n} \right\rangle = \frac{1}{e^{\alpha} - 1} \equiv n_P, \tag{2.76}$$

який відомий під назвою розподілу Планка.

Так само можна легко знайти середньоквадратичне відхилення кількості фотонів від середнього значення $\overline{n} \equiv \langle \hat{n} \rangle$. Воно дорівнює:

$$\langle \delta n^2 \rangle = \langle (\hat{n} - \overline{n})^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - n_P{}^2. \tag{2.77}$$

Так само, як і раніше, легко одержимо:

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = C \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} C^{-1} =$$
$$= (1 - e^{-\alpha}) \left[\frac{e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2} + \frac{2e^{-2\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^3} \right] = n_P + 2n_P{}^2. \tag{2.78}$$

Тоді

$$\langle \delta n^2 \rangle = \langle (\hat{n} - n_P)^2 \rangle = n_P + n_P{}^2. \tag{2.79}$$

У наступних розділах розглянемо випадки флуктуацій кількості фотонів для випромінювання у когерентному та стисненому станах, а також флуктуації кількості відліків детекторів випромінювання. Такі розрахунки можуть бути корисними під час проектування оптичних комунікаційних систем.

Якщо відоме значення $\overline{n}$, тобто середня кількість фотонів у одній моді, можна знайти густину оптичного випромінювання у малому частотному інтервалі $d\omega$. Очевидно, що величина енергії у цьому інтервалі дорівнює:

$$dE_\omega = \hbar\omega D(\omega) \overline{n} d\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1} d\omega, \tag{2.80}$$

де перший дріб в останньому виразі є густиною оптичних мод $D(\omega)$ (див. (2.45)), а другий – рівноважна енергія гармонічного осцилятора з частотою ω.

Вираз (2.80) (формула Планка) задає спектральну густину енергії. Його Планк одержав ще 1900 року. Із (2.80) легко побачити, що повну енергію випромінювання чорного тіла, яку одержуємо після інтегрування (2.80) по всіх частотах, можна записати у вигляді:

$$E = \sigma T^4, \tag{2.81}$$

де коефіцієнт σ не залежить від температури.

Це співвідношення відоме як закон Стефана–Больцмана.

Спектральна густина випромінювання залежить від функції

$$f\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) = \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1},$$

де ми, як і раніше, замість змінної ω використали безрозмірну величину $\alpha = \dfrac{\hbar\omega}{T}$.

Схематично функцію $f(\alpha)$ зображено на рис. 12.

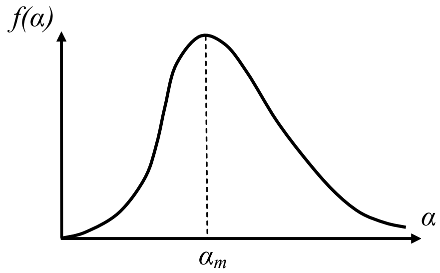

Рис. 12

Максимум спектрального розподілу є в точці α_m, якій відповідає частота ω_m. Її значення дорівнює:

$$\omega_m = \alpha_m \frac{T}{\hbar}, \tag{2.82}$$

де α_m – постійна, що не залежить від температури T.

Лінійну залежність ω_m від температури T називають законом зміщення Віна (1890).

За малих частот ($\hbar\omega << T$) рівняння (2.80) переходить у класичну формулу Релея–Джінса

$$dE_\omega = \frac{VT}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega, \tag{2.83}$$

яку можна інтерпретувати як сумарну енергію коливань класичних осциляторів, частоти яких знаходяться в інтервалі $d\omega$. Середня енергія кожного з них дорівнює T.

В іншому ("ультраквантовому") граничному випадку ($\hbar\omega >> T$) одержимо відому формулу Віна:

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3 e^{-\frac{\hbar\omega}{T}} d\omega. \tag{2.84}$$

Тут експоненціальний множник вказує на малу кількість фотонів у кожній моді.

Задачі

1. Перейти від класичного до квантовомеханічного опису динаміки електричного LC контуру (див. схему на рис. 13).

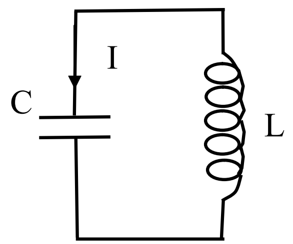

Рис. 13. Електричне коло з ємністю C та індуктивністю L. Літерою I позначено струм перезарядки ємності. Стрілка вказує на його позитивний напрямок

Напруга на конденсаторі V_c (тобто різниця потенціалів на верхній та нижній обкладинках) пов'язана із зарядом конденсатора q співвідношенням:

$$\frac{q}{C} = V_C. \tag{1}$$

З іншого боку, ця ж напруга дорівнює електрорушійній силі самоіндукції

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}, \tag{2}$$

що виникає під час протікання змінного струму через індуктивність L. Враховуючи, що

$$I = \frac{dq}{dt}, \tag{3}$$

класичне рівняння "руху" для кола (рівняння Кірхгофа) матиме вигляд:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \tag{4}$$

або в еквівалентній формі

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{5}$$

де $\omega^2 = (LC)^{-1}$.

Рівняння (5) збігається з рівнянням руху для гармонічного осцилятора з власною частотою ω. Далі, повторюючи процедуру, що використано в цій главі під час переходу до квантовомеханічного опису, запишемо гамільтоніан системи у вигляді:

$$\mathrm{H} = \frac{p^2}{2L} + \frac{q^2}{2C}, \tag{6}$$

де $p = L\dot{q}$.

Легко переконатись, що рівняння Гамільтона зводяться до рівняння руху (5).

Перший член у правій частині (6) відповідає "кінетичній" енергії осцилятора, яка є магнітною енергією, накопиченою в індуктивності. Другий визначає величину "потенціальної" енергії, тобто енергії електричного поля між обкладинками конденсатора. Природа цих членів гамільтоніана є такою самою, як і у виразі (2.23), який одержано додаванням електричної та магнітної складових енергії (див. (2.20), (2.22)).

Як і раніше, для переходу до квантовомеханічного опису досить замінити канонічні змінні (координату та імпульс $\{q, p\}$) на відповідні квантовомеханічні оператори $\{\hat{q}, \hat{p}\}$ та накласти на них комутаційні співвідношення $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Після переходу до змінних a, a^+ гамільтоніан системи набуває вигляду:

$$\mathrm{H} = \hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

2. Виразити усі компоненти магнітного поля $\vec{H}$ у проміжку між двома плоско-паралельними металевими пластинами через E_x та E_y.

3. Довести, що $\sum\limits_{s=1,2} e^s_{\vec{k}x} e^s_{\vec{k}y}$ не залежить від вибору орієнтації векторів поляризації $\vec{e}^{\,1}_{\vec{k}}, \vec{e}^{\,2}_{\vec{k}}$ і не змінюється зі зміною $\vec{k}$ на $-\vec{k}$.

4. Діючи операторами народження фотонів $a^+_{\vec{k},s}$ на вакуумний стан $|0\rangle$, побудувати хвильову функцію електромагнітного поля, в якому в двох різних модах є по два фотони.

5. Показати, що в полях, утворених в результаті дії на вакуумний стан $|0\rangle$: (а) оператора народження фотона $a^+_{\vec{k},s}$ з імпульсом $\vec{k}$ і поляризацією s, чи (б) оператора народження фотона $\hat{V}^+(\vec{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{2V}} \sum\limits_{\vec{k},s} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a^+_{\vec{k},s}$ у точці $\vec{r}$, є лише один фотон.

Вказівка.

Використовуючи вираз для оператора повної кількості фотонів (2.66), можна показати, що хвильові функції в обох випадках (а) і (б) є його власними функціями з власними значеннями, що дорівнюють одиниці.

6. Довести, що гамільтоніан вільного поля $\mathrm{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \dfrac{1}{2}\right)$ можна записати через його власні стани в представленні чисел заповнення у такому вигляді:

$$\mathrm{H} = \sum_n E_n |n\rangle\langle n|,$$

де E_n та $|n\rangle$ власні значення та власні функції гамільтоніана у представленні чисел заповнення (у фоківському представленні).

7. Знайти середні та середньоквадратичні значення операторів

$$\frac{a + a^+}{2}, \quad \hat{n} = a^+ a:$$

а) у фоківському стані $|m\rangle$;

б) у суперпозиції фоківських станів $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|m\rangle + e^{i\varphi}|m+1\rangle\right)$.

8. Показати, що електромагнітне поле в стані

$$|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle,$$

де $|0\rangle$, $|1\rangle$ вакуумний стан та стан з одним фотоном, має субпуассонівську статистику; α_0 та α_1 – комплексні числа.

3. Сила Казимира

3.1. Енергія вакуумних коливань електромагнітного поля у проміжку між ідеальними провідниками

У цьому розділі повернемося до аналізу властивостей електромагнітного поля, що існує в проміжку між двома плоско-паралельними пластинами. Як і раніше, розміри пластин вважатимемо значно більшими, ніж відстань між ними і тому знехтуємо крайовими ефектами. Ми вже переконались, що за такої геометрії в щілині можуть поширюватись хвилі, частоти яких залежать від хвильового вектора $\vec{k}_{\perp}$, паралельного до площини пластин, та дискретного параметра $\frac{\pi}{a}m, \quad m = 1, 2...$, який характеризує розподіл поля у напрямку z.

Явна залежність частоти від згаданих величин має вигляд:

$$\omega_{k_{\perp}m} = c\sqrt{k_{\perp}^2 + \frac{\pi^2}{a^2}m^2}\,. \tag{3.1}$$

Такий закон дисперсії для частоти одержано для випадку, коли тангенційні компоненти електричного поля та нормальні компоненти магнітного поля поблизу металевих поверхонь дорівнюють нулеві,

$$E_{x,y} = H_z = 0\,, \text{ якщо } z = 0, a\,, \tag{3.2}$$

що відповідає нескінченній провідності матеріалу. Кожному набору величин $\vec{k}_{\perp}, \frac{\pi}{a}m$ відповідають дві хвилі із взаємно перпендикулярними поляризаціями (див. (2.17)). У класичному випадку, коли відсутні джерела випромінювання, амплітуди полів усіх мод дорівнюють нулеві. Ситуація стає зовсім іншою у квантовому випадку, тобто, коли енергія поля в проміжку між пластинами задається виразом:

$$W = \sum_{\vec{k}_\perp, m, s} \hbar\omega_{\vec{k}_\perp, m} \left(\hat{n}_{\vec{k}_\perp, m, s} + \frac{1}{2} \right). \tag{3.3}$$

Якщо температура близька до нуля, то перший член у дужках можна не враховувати, оскільки кількість квантів у вакуумному стані дорівнює нулеві. Тоді значення W визначається тільки нульовими коливаннями електромагнітного поля, а саме:

$$W = \sum_{\vec{k}_\perp, m} \hbar\omega_{\vec{k}_\perp, m} , \tag{3.4}$$

де ми вже просумували по s, тобто по різних поляризаціях хвиль.

Для реальних систем це означає, що характерна енергія квантів поля (яку можна прирівняти до температури T) значно менша від енергії власних коливань поля у щілині. Із рівняння (3.1) видно, що остання більша або дорівнює $\hbar c \dfrac{\pi}{a}$. Враховуючи розподіл Планка (2.71), легко побачити, що для кімнатних температур відповідний критерій має вигляд: $a < 2 \cdot 10^{-3}$ см. Він добре виконується уже для мікронних щілин.

Наявність ненульового значення енергії поля у проміжку, яка в загальному випадку є функцією відстані між пластинами, означає, що між пластинами має існувати взаємодія. Проте, коли прирівняти цю силу до похідної (із знаком мінус) від енергії поля по відстані між пластинами, то ми не одержимо правильного результату. Причиною

цього є хоча б та обставина, що сума (3.4) є нескінченною величиною. Така ситуація типова для задач квантової електродинаміки. Проте нас цікавитиме не сама енергія (3.4), а різниця енергії (3.4) та енергії поля W_0 у цьому ж проміжку, знайдена без врахування впливу меж. Забігаючи наперед, зазначимо що в різниці енергій вже відсутня згадана розбіжність. Знайдена за такої постановки задачі сила взаємодії пластин є рівнодійною сил відштовхування, зумовленими “внутрішнім” вакуумом, та притисненням пластин одна до одної “зовнішнім” вакуумом. З подальшого розгляду буде видно, що притиснення переважає відштовхування. Тому спостерігається ефективне притягання пластин.

Далі, щоб уникнути математичних операцій з нескінченними величинами, застосуємо один з можливих штучних прийомів регуляризації суми (3.4): помножимо кожен її член на експоненціальний множник

$$e^{-\delta\omega_{k_\perp, m}} , \tag{3.5}$$

де $\delta > 0$.

Тоді сума стане скінченною. На завершальному етапі обчислень можна буде спрямувати δ до нуля і переконатись, що сила Казимира залишається скінченною.

У літературі існує певне фізичне обґрунтування описаної процедури. Воно полягає в тому, що за дуже великих частот не можна забезпечити виконання граничних умов для полів (3.2). Справді, зі збільшенням частоти електромагнітного поля воно зрештою починає проникати в метал, оскільки провідність є хоч і великою, але скінченною величиною. Завдяки такому проникненню ефективна товщина щілини збільшується, що виражається у зменшенні частоти $\omega_{k_\perp m}$ порівняно з тим значенням, яке задано виразом (3.1). Формально це зменшення можна врахувати множником (3.5).

Після переходу від суми по $\vec{k}_\perp$ до інтегралу

$$\sum_{\vec{k}_\perp} = \frac{S}{(2\pi)^2}\int dk_x dk_y \tag{3.6}$$

(S – площа поверхні пластини) вираз для енергії W набуває вигляду:

$$\begin{aligned} W(a) &= \frac{Sc\hbar}{(2\pi)^2}\int d\vec{k}_\perp \sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{k_\perp^2 + \frac{\pi^2}{a^2}m^2}\, e^{-\delta\omega_{k_\perp,m}} = \\ &= \frac{Sc\hbar}{8\pi a}\int d\vec{k}_\perp \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sqrt{k_\perp^2\frac{a^2}{\pi^2} + m^2}\left(1-\delta_{m,0}\right) e^{-\delta\omega_{k_\perp,m}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Тут ми переписали суму по m у симетричному (відносно нижньої та верхньої меж) вигляді. Далі опускатимемо член з $\delta_{m,0}$, оскільки внесок відповідного доданка в $W(a)$ не залежить від a і тому він не впливає на значення сили Казимира.

Величину W_0 знаходять з простих якісних міркувань. Енергія вакуумного електромагнітного поля в об'ємі $V = SL_z$ $(V \to \infty)$ (див. рис. 14) дорівнює:

$$W_V = \frac{Vc\hbar}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}_\perp dk_z \sqrt{k_\perp^2 + k_z^2}\,. \tag{3.8}$$

Частку цієї енергії, що знаходиться в об'ємі щілини, можна задати співвідношенням:

$$W_0 = \frac{a}{L_z} W_V\,. \tag{3.9}$$

Вводячи нову змінну $t = \dfrac{a}{\pi}k_z$, різницю між W та W_0 запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} &W(a) - W_0(a) = \\ &= \frac{Sc\hbar}{8\pi a}\int d\vec{k}_\perp\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_\perp, n) - \int_{-\infty}^{\infty} dt f(k_\perp, t)\right], \end{aligned} \tag{3.10}$$

де

$$f(k_\perp, n) = \sqrt{\frac{a^2}{\pi^2}k_\perp^2 + n^2}\, e^{-\delta\omega_{k_\perp,n}}\,, \tag{3.11}$$

а другий член у квадратних дужках враховує внесок W_0.

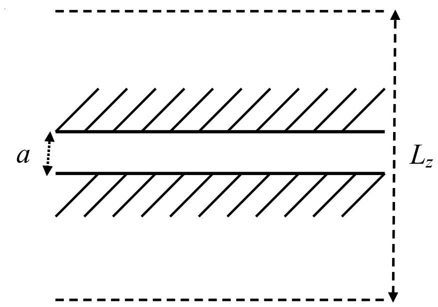

Рис. 14

Далі нам потрібно знайти різницю між сумою та інтегралом у квадратній дужці (3.10). Задача істотно полегшиться, якщо суму по n запишемо у вигляді інтегралу, подібного до другого члена. Для цього розширимо межі визначення f як функції n на комплексну площину. Значення $f(n)$ можна виразити через відоме в теорії функцій комплексних змінних інтегральне співвідношення

$$f(n) = \oint \frac{dt}{2\pi i}\frac{f(t)}{t-n}\,, \tag{3.12}$$

де інтегрування в комплексній площині здійснюється довкола точки n проти ходу годинникової стрілки.

З явного виразу для функції $f(n)$ (3.11) видно, що в комплексній площині існують точки розгалуження $n = \pm i\frac{a}{\pi}k_{\perp}$. Тому контур інтегрування в (3.12) має бути таким, щоб особливі точки функції $f(t)$ знаходились зовні ділянки, яку він охоплює.

Враховуючи (3.12), запишемо суму в (3.10) у такому вигляді:

$$\sum_n f(n) = \sum_n \oint \frac{dt}{2\pi i}\frac{f(t)}{t-n}. \qquad (3.13)$$

На рис. 15 зображено, як здійснюється інтегрування в окремих членах цієї суми.

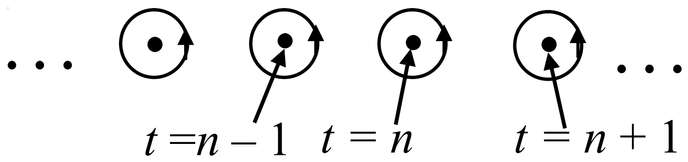

Рис. 15

Для окремого, наприклад, n-го доданка в (3.13) контур інтегрування можна деформувати довільно, не перетинаючи при цьому особливих точок.

Змінимо контур інтегрування так, як зображено на рис. 16, замкнувши його на нескінченності ($t = \pm\infty$).

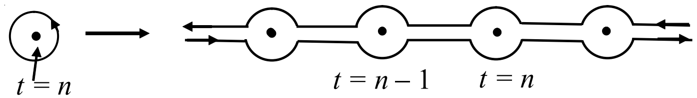

Рис. 16. Початковий контур навколо полюса $t = n$ (ліворуч) ми деформували так, щоб він обходив полюси і в інших доданках суми (3.13) (правий рисунок). Контур замикається на нескінченності

Контур, що зображено праворуч на рисунку, можна взяти однаковим для усіх доданків у (3.13). Тоді перед тим як інтегрувати, знайдемо суму по n в підінтегральному виразі. Це можна зробити, оскільки аргументи t в усіх доданках однакові. Використовуючи відому формулу

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-n} = \pi ctg(\pi t), \qquad (3.14)$$

суму по n у виразі (3.13) можна записати у простому вигляді:

$$\sum_n f(n) = \int \frac{dt}{2i} f(t) ctg(\pi t), \qquad (3.15)$$

де інтегрування здійснюється по контуру, що зображений праворуч на рис. 16.

Інтеграл, що знаходиться в квадратній дужці (3.10), також можна записати як половину різниці інтегралів по нижній та верхній частинах контуру, зображеного на рис. 16. Очевидно, це можна зробити, оскільки підінтегральна функція не має особливостей поблизу дійсної осі.

У підсумку одержимо:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) - \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) = \\ &= \int_{верхн} dt f(t)\left(-\frac{ctg(\pi t)}{2i} - \frac{1}{2}\right) + \\ &+ \int_{нижн} dt f(t)\left(\frac{ctg(\pi t)}{2i} - \frac{1}{2}\right)\end{aligned}, \qquad (3.16)$$

де позначення “*верхн*” означає інтегрування в напрямку зліва – направо по верхній частині контуру на рис. 16, тобто по тій його частині, яка огинає полюси $t = n$ зверху;

"*нижн*" – по нижній частині контуру (у тому ж напрямку). Другий інтеграл у правій частині (3.16) дорівнює першому, в чому легко переконатись, зробивши в ньому заміну $t \to -t$.

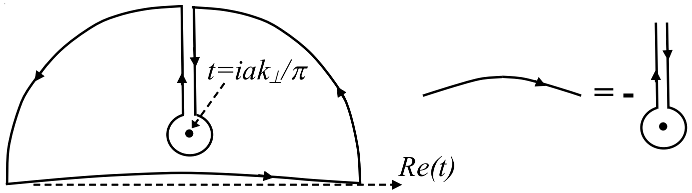

Рис. 17. Нижня лінія контуру схематично зображає верхню лінію на рис. 16. Праворуч показано, що інтеграл по ній (зліва направо) дорівнює інтегралу по розрізу, взятому зі знаком (–)

Враховуючи, що

$$ctg(\pi t) = i\frac{e^{i\pi t} + e^{-i\pi t}}{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}},$$

одержимо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) - \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) = 2\int_{верхн} dt \frac{f(t)}{e^{-i2\pi t} - 1}. \qquad (3.17)$$

Замкнемо контур інтегрування у верхній півплощині, як зображено на рис. 17. У ділянку, обмежену контуром, не має потрапити точка розгалуження $t = i\frac{a}{\pi}k_\perp$. Цю особливу точку можна обійти вертикальним розрізом, як зображено на рисунку. Важливим є те, що частини контурів, які розташовані між нижньою лінією на рис. 17 та розрізом, не дають значного внеску в інтеграл, оскільки знаменник у правій частині (3.17) прямує до нескінченності за експоненціальним законом, коли характерний радіус кривини цих частин необмежено збільшується.

Треба також зазначити, що вже на цьому етапі обчислень можна опустити штучно введений множник $\exp(-\delta\omega_{k_\perp n})$, оскільки після віднімання від енергії вакуумного поля між пластинами $W(a)$ величини $W_0(a)$ зникає розбіжність інтегралів.

Інтеграл по замкненому контуру, що охоплює частину комплексної площини, яка не містить особливих точок, завжди дорівнює нулеві. Тому інтеграл по нижній лінії на рис. 17 дорівнює інтегралу по розрізу, взятому зі знаком (–) (див. праву частину рис. 17). Враховуючи, що функція $(k_\perp^2 \frac{a^2}{\pi^2} + t^2)^{1/2}$ змінює знак з переходом від правої до лівої частини розрізу (див. задачу 1), і те, що напрямки інтегрування на лівому та правому берегах протилежні, можна стверджувати, що інтеграл по розрізу дорівнює подвоєному інтегралу тільки по його правій частині. Отже, вираз (3.17) перепишемо у вигляді:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) - \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) =$$

$$= -4\int_{i\infty}^{ik_\perp a/\pi} dt \frac{f(t)}{e^{-i2\pi t} - 1} = -4\int_{k_\perp a/\pi}^{\infty} dr \frac{\sqrt{r^2 - k_\perp^2\pi^2 / a^2}}{e^{2\pi r} - 1}, \quad (3.18)$$

де ми зробили заміну змінних $t = ir$ і врахували, що

$$f(t) = f(ir) = \left(k_\perp^2 \frac{a^2}{\pi^2} - r^2\right)^{1/2} = i\left(r^2 - k_\perp^2 \frac{a^2}{\pi^2}\right)^{1/2}. \quad (3.19)$$

Тоді вираз (3.10) для різниці енергій набуває вигляду:

$$W(a)-W_0(a)=-\frac{Sc\hbar}{2\pi a}\int d\vec{k}_\perp\int\limits_{k_\perp a/\pi}^{\infty}dr\frac{\sqrt{r^2-k_\perp^2a^2/\pi^2}}{e^{2\pi r}-1}\,. \quad (3.20)$$

Записавши $d\vec{k}_\perp$ у вигляді $dk_\perp k_\perp d\varphi$, де φ – кут між вектором $\vec{k}_\perp$ та віссю x, а також зробивши заміну $k_\perp\dfrac{a}{\pi}=\alpha$, одержимо:

$$W(a)-W_0(a)=-\frac{\pi^2Sc\hbar}{a^3}\int\limits_0^{\infty}d\alpha\alpha\int\limits_{\alpha}^{\infty}dr\frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}}{e^{2\pi r}-1}\,. \quad (3.21)$$

Змінюючи порядок інтегрування в (3.21)

$$\int\limits_0^{\infty}d\alpha\int\limits_{\alpha}^{\infty}dr\to\int\limits_0^{\infty}dr\int\limits_0^{r}d\alpha\,,$$

перепишемо його у вигляді

$$W(a)-W_0(a)=-\frac{\pi^2Sc\hbar}{a^3}\int\limits_0^{\infty}dr\int\limits_0^{r}d\alpha\alpha\frac{\sqrt{r^2-\alpha^2}}{e^{2\pi r}-1}\,. \quad (3.22)$$

Тоді можна легко проінтегрувати в правій частині (3.22):

$$\int\limits_0^{r}d\alpha\alpha\sqrt{r^2-\alpha^2}=\frac{1}{3}r^3,\quad \int\limits_0^{\infty}\frac{drr^3}{e^{2\pi r}-1}=\frac{1}{2^4\cdot 15}\,. \quad (3.23)$$

З врахуванням (3.23) вираз (3.22) набуває вигляду:

$$W(a)-W_0(a)=-\frac{\pi^2Sc\hbar}{2^4\cdot 45\cdot a^3}\,. \quad (3.24)$$

3.2. Фізична інтерпретація

Сила притягання між пластинами в перерахунку на одиницю площі поверхні дорівнює:

$$F(a)=-\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial a}(W-W_0)=-\frac{\pi^2c\hbar}{240\cdot a^4}\,. \quad (3.25)$$

Як бачимо, вона має суто квантову природу, оскільки є пропорційною сталій Планка $\hbar$. Наявність притягання можна інтерпретувати як різницю тисків на пластину зовнішнього вакууму, та вакууму, що знаходиться між металевими пластинами. Оскільки результуюча сила спричинює притягувальну дію, то можна казати, що зовнішній тиск більший, ніж тиск із середини. Інакше кажучи, густина енергії нульових коливань за межами пластин більша, ніж між ними. Це пояснюється дискретністю спектра власних коливань електромагнітного поля між пластинами.

У літературі існує ще одне фізичне пояснення притягання пластин. Стверджується, що воно є наслідком притягання між зарядами, які випадково з'являються та зникають на поверхнях. Так, наприклад, коли позитивний заряд з'явився на верхній поверхні, він індукує появу негативного заряду на нижній. Заряди з протилежним знаком притягуються між собою, що й спричинить ефект притягання пластин. Флуктуації поверхневого заряду можуть бути теплової природи. Проте за низьких температур (значно менших від характерних енергій квантів власних коливань заряду) – це будуть лише нульові коливання вакууму. Саме цей випадок і розглянуто у теорії, що подано вище. Зазначимо, що різні, як здавалося б, пояснення не суперечать одне одному, оскільки фізичною причиною, що зумовлює дискретність спектру власних коливань електромагнітного поля, є вже згадані флуктуаційні рухи зарядів, які перешкоджають проникненню поля в провідники.

Цікаво порівняти силу Казимира із силою електростатичного притягання між зарядженими пластинами за заданої різниці потенціалів V_e між ними. Величина цієї сили на одиницю поверхні дорівнює (див. задачу **2**):

$$F_e(a) = -\frac{V_e^2}{8\pi a^2}. \tag{3.26}$$

Сила Казимира (3.25) зростає зі зменшенням a значно швидше, ніж сила $F_e(a)$. Тому, коли відстань між провідниками дуже мала, сила Казимира превалює. Її потрібно враховувати під час проектування складних наносистем, притягання між елементами якої може призводити до їхньої деформації, а то й руйнування. Ця сила є актуальною в задачах наномеханіки, оскільки може істотно змінити і рівняння руху (див., наприклад, останню працю в списку) і умови рівноваги окремих частин наносистеми.

3.3. Сила притягання між діелектричними пластинами, зумовлена ефектом Казимира. Ван-дер-Ваальсова сила притягання між частинками

Коли розглядати щілину не між металевими, а між діелектричними поверхнями, то фізична картина ефекту Казимира дещо зміниться. Найголовнішим чинником є зміна конфігурації поля. Причиною є те, що граничні умови поблизу діелектричних поверхонь істотно відрізняються від тих, що були у випадку металу з нескінченною провідністю (див. (2.8), (2.10)): електромагнітне поле проникає в діелектрик. Граничні умови на межах розділу середовищ означають неперервність нормальної складової вектора електричної індукції εE_z та тангенційних компонент поля $E_{x,y}$.

Вони мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &E_{x,y}(z=+0) = E_{x,y}(z=-0), \\ &E_z(z=+0) = \varepsilon_2 E_z(z=-0), \\ &E_{x,y}(z=a-0) = E_{x,y}(z=a+0), \\ &E_z(z=a-0) = \varepsilon_2 E_z(z=a+0), \end{aligned} \tag{3.27}$$

(див. рис. 18). Позначення $z = a \pm 0, z = \pm 0$ означають точки, нескінченно близькі до $z = a$ та $z = 0$, але наближаються до цих меж із боку більших (+) чи менших (–) значень z, відповідно. Діелектричні проникності середовищ 1 та 2 можуть бути різними, і для конкретних розрахунків потрібно знати залежності $\varepsilon_{1,2}$ від частоти ω. Як і раніше, розв'язки хвильового рівняння для тришарової системи шукаємо у вигляді:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(z) e^{i(\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp - \omega t)}, \tag{3.28}$$

де функція $\vec{E}_0(z)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{d^2 \vec{E}_0(z)}{dz^2} - K_i^2 \vec{E}_0(z) = 0. \tag{3.29}$$

Тут введене позначення $K_i^2 = k_\perp^2 - \frac{\varepsilon_i \omega^2}{c^2}, i = 1, 2$. Вважаємо, що в самій щілині $\varepsilon = 1$. Очевидно, що внесок у силу Казимира дають тільки розв'язки, локалізовані поблизу щілини. Їх можна записати в такому вигляді:

$Ae^{-K_1 z}$ – для діелектрика 1;

$Be^{-Kz} + Ce^{Kz}$ – для щілини;

$De^{K_2 z}$ – для діелектрика 2.

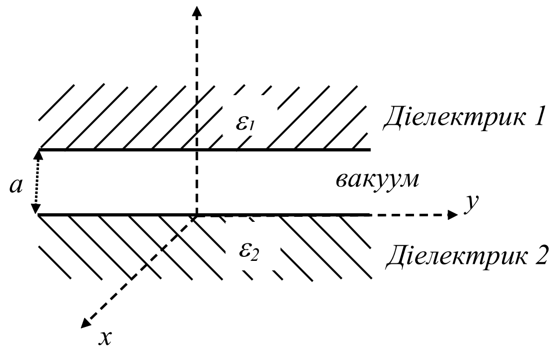

Рис. 18

Зшиваючи розв'язки на межах розділу та враховуючи поперечність електромагнітного поля (рівняння Пуассона), одержимо систему лінійних однорідних рівнянь для знаходження невідомих амплітуд A, B, C, D. Стандартна умова існування нетривіального розв'язку має вигляд:

$$\Delta(\omega) = 0\,, \qquad (3.30)$$

де $\Delta(\omega)$ – детермінант згаданої однорідної системи лінійних рівнянь.

Ми не конкретизуємо функцію $\Delta(\omega)$, яка залежить не лише від частоти, а й від a та $\varepsilon_{1,2}(\omega)$. Розв'язки дисперсійного рівняння (3.30) $\omega_n(k_\perp, a)$ визначать закон дисперсії тих мод, поля яких локалізовані в самій щілині та поблизу неї. Значення коренів рівняння (3.30) значно відрізняються від тих, що були у випадку металу (3.1). На відміну від попереднього випадку пластин з ідеальною провідністю, тут для кожного типу мод (з поляризацією паралельною до площини пластини та під кутом до неї) існує окремий набір власних частот. Цю обставину потрібно враховувати під час конкретних розрахунків сили Казимира.

Як і раніше, енергію нульових коливань W можна задати виразом:

$$W = \frac{S}{(2\pi)^2}\sum_n \int d\vec{k}_\perp \frac{\hbar\omega_{k,n}}{2}\,. \qquad (3.31)$$

Знаходження суми (3.31) значно спрощується, якщо використати так званий принцип аргумента (теорему аргумента). За цим принципом дискретну суму значень деякої величини (у нашому випадку ω_n) можна виразити через контурний інтеграл якоїсь функції частоти ω, якщо множина значень частот, за яких ця функція дорівнює нулеві, збігається з набором значень ω_n. Легко побачити, що детермінант $\Delta(\omega)$ є саме такою функцією. У справедливості принципу аргументу легко переконатись, виходячи з простих міркувань. Справді, якщо для якогось значення ω_n функція $\Delta(\omega_n)$ дорівнює нулеві, то поблизу точки ω_n функцію $\Delta(\omega)$ можна апроксимувати виразом:

$$\Delta(\omega) \approx \frac{\partial\Delta}{\partial\omega}(\omega - \omega_n)\,. \qquad (3.32)$$

Як і в першому параграфі цього розділу, використаємо інтегральне представлення дискретного числа (у цьому випадку – це ω_n):

$$\omega_n = \oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{\omega}{\omega - \omega_n}\,, \qquad (3.33)$$

де інтегрування здійснюється по контуру, що обходить полюс $\omega = \omega_n$ у напрямку проти часової стрілки та охоплює його.

Враховуючи (3.32) та проводячи контур близько до полюса, тотожність (3.33) перепишемо у вигляді:

$$\omega_n = \oint \frac{d\omega}{2\pi i}\frac{\omega\partial\Delta(\omega)/\partial\omega}{\Delta(\omega)} = \oint \frac{d\omega}{2\pi i}\omega\frac{\partial \ln\Delta(\omega)}{\partial\omega}\,. \qquad (3.34)$$

Тоді в сумі по n, що входить до виразу (3.31), можна використати однаковий контур для кожного з інтегралів, як зображено на рис. 16. У результаті одержимо:

$$\sum_n \omega_n = \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \omega \frac{\partial \ln \Delta(\omega)}{\partial \omega}. \tag{3.35}$$

Тут контур інтегрування охоплює усі точки, де $\Delta(\omega) = 0$, тобто усі корені дисперсійного рівняння (3.30). Оскільки частоти ω_n є дійсними додатними величинами, то можна взяти контур інтегрування від точки $i\infty$ до точки $-i\infty$ і замкнути його півколом нескінченного радіуса у правій півплощині комплексної змінної ω. Очевидно, що енергія Казимира, знайдена після обчислення суми (3.35), є нескінченною величиною. Проте практичне значення, як і у випадку металевих пластин, має різниця енергії (3.35) та енергії поля без діелектричних шарів, тобто величина $W(a) - W(a \to \infty)$.

Ідея такого перенормування енергії належить Казимиру, відповідна його праця була опублікована 1948 р. Саме перенормована енергія визначає силу Казимира, яка спричинює притягання між діелектриками.

Із врахуванням сказаного легко одержуємо:

$$\begin{aligned} &W(a) - W(\infty) = \\ &= -\frac{S\hbar}{2(2\pi)^3} \int d\vec{k}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \ln \frac{\Delta(a, k_\perp, i\zeta)}{\Delta(\infty, k_\perp, i\zeta)} = \\ &= \frac{S\hbar}{2(2\pi)^3} \int d\vec{k}_\perp \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \ln \frac{\Delta(a, k_\perp, i\zeta)}{\Delta(\infty, k_\perp, i\zeta)} \end{aligned}, \tag{3.36}$$

де ми зробили заміну $\omega = i\zeta$.

Останній інтеграл одержано з попереднього інтегруванням по частинах.

Щоб знайти остаточне значення $W(a) - W(\infty)$, треба знати явний вигляд функцій $\varepsilon_{1,2}(\omega) \equiv \varepsilon_{1,2}(i\zeta)$. Похідна від різниці енергій визначить силу Казимира.

Як видно з виразу (3.36), немає потреби знаходити спектр власних коливань у нашій системі. Достатньо знати детермінант $\Delta(\omega)$. Це значно спрощує розрахунки. Саме у цьому моменті виявляються переваги застосування принципу аргументу. Нагадаємо, що детермінант $\Delta(\omega)$, який входить у підінтегральний вираз у (3.36), легко можна знайти під час виконання процедури зшивки розв'язків хвильового рівняння в різних ділянках. Ми не наводимо деталей розрахунків, які можна знайти в оглядовій праці Бордага та інш. за 2001-й рік.

Формулу (3.36) можна застосовувати не лише у випадку діелектриків, а й для металів зі скінченною провідністю. В останньому випадку $\varepsilon_{1,2}(\omega)$ можна виразити через провідність $\sigma(\omega)$:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi\sigma}{i\omega}.$$

Коли ми маємо справу з металевими поверхнями і нас цікавить випадок малих відстаней між пластинами, а саме:

$$a << c / \omega_p,$$

де ω_p – плазмова частота металу, то для знаходження сили Казимира можна використати наближену формулу Ліфшиця (див. Ландау и Лифшиц, “Статистическая физика”, 1978):

$$F(a) = -\frac{\hbar}{8\pi^2 a^3} \int_0^\infty d\zeta \left[\frac{\varepsilon(i\zeta) - 1}{\varepsilon(i\zeta) + 1} \right]^2. \tag{3.37}$$

Під час одержання (3.37) вважають, що:

а) матеріали пластин однакові ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$);

б) $\varepsilon(i\zeta) = 1 + \dfrac{\omega_p^2}{\zeta(\zeta+\nu)}$,

де ν – частота зіткнень електронів з фононами та дефектами, якою можна знехтувати, коли $\omega_p >> \nu$;

в) можна знехтувати температурними ефектами, що справедливо, коли середня кількість фотонів у модах, що дають істотний внесок у (3.37), значно менша від одиниці.

Остання умова виконується, якщо $\hbar\omega_p >> T$.

У випадку металів з високою електропровідністю ($\omega_p \sim 10^{16} c^{-1}$) ця умова завжди виконується.

Величину ω_p можна оцінити з виразу:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m}},$$

де n_e – концентрація носіїв заряду; m – їхня маса.

Наведений вираз для плазмової частоти справедливий у випадку квадратичної залежності енергії носіїв заряду від їхнього імпульсу.

Після інтегрування в (3.37) по ζ, одержимо:

$$F(a) = -\frac{\hbar\omega_p}{32\sqrt{2}\pi a^3}. \tag{3.38}$$

Як бачимо, у випадку реального металу, коли виконується умова $a << c/\omega_p$, сила Казимира зменшується в $\dfrac{2\sqrt{2}\pi^3}{15}\dfrac{c}{a\omega_p}$ раз порівняно з випадком нескінченної провідності пластин (перший множник в останній формулі дорівнює ≈ 5.85). Зменшення сили притягання пов'язане з інерційністю реакції однієї поверхні на появу заряду на іншій. Характерний час появи індукованого заряду можна оцінити як величину порядку $1/\omega_p$.

Як уже зазначалось, на електромагнітні збурення, частоти яких значно більші від ω_p, метал майже не реагує, оскільки на його поверхні не встигає сформуватись екрануючий заряд. Тому електромагнітні хвилі проникають за межі щілини, що еквівалентно збільшенню її товщини для таких високочастотних мод.

Формули для сил Казимира (3.25), (3.38) та електростатичного притягання (3.26) можна модифікувати так, щоб вони описували взаємодію не лише між пластинами, а й між близько розташованими тілами з кривими поверхнями. Деталі розрахунків можна знайти в останній праці з наведеного нижче списку.

Наприкінці розділу зазначимо, що ефектом Казимира пояснюється наявність притягання між молекулами газу (сила Ван-дер-Ваальса). Ця сила має електромагнітну природу. Важливим є те, що притягання спостерігається і між електронейтральними молекулами, і навіть між молекулами, в яких середнє значення дипольного моменту дорівнює нулеві. Проте молекули можуть поляризуватись, тобто набувати дипольного моменту під дією зовнішнього поля. Нульові коливання вакууму є саме таким полем, яке завжди впливає на стан молекул. Тоді осцилюючий диполь $d_1(t)$ однієї молекули стає джерелом електромагнітного поля, яке поширюється до якоїсь іншої молекули і також поляризує її. Другий дипольний момент $d_2(t)$, синхронно осцилюючий з першим, є пропорційним $d_1(t)$ і залежить від відстані між ними як r^{-3}. Отже, сила диполь-дипольної взаємодії F_{dd}

пари молекул пропорційна величині $\frac{d_1 d_2}{r^3} \sim \frac{(d_1)^2}{r^6}$. Її одержав Лондон 1937 р.

Зазначимо, що така степенева залежність сили притягання ($F_{dd}(r) \sim r^{-6}$) буде у випадку малих відстаней між молекулами, а саме: для відстаней, менших від довжини хвилі випромінювання, частота якого дорівнює частоті дипольних коливань. Коли ж частинки дуже віддалені одна від одної, то сила Ван-дер-Ваальса модифікується: $F_{dd} \sim r^{-7}$.

Саме таку залежність, яку назвали загаяною взаємодією (retarded interaction), одержали Казимир та Польдер 1948 року, коли досліджували фізичну природу притягання колоїдних частинок.

Зазначимо, що формула (3.25) також описує загаяну взаємодію, оскільки вона справедлива лише у випадку $a << c / \omega_p$.

Додаткову інформацію щодо Ван-дер-Ваальсової сили можна знайти в монографії Мілонні та частково в 9-му томі курсу теоретичної фізики Ландау і Ліфшиця.

P. W. Milonni. *The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics.* – INC: Academic Press, 1994.

M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko. *New developments in the Casimir effect.* – Phys. Rep., 2001. – **353**. – P. 1–205.

H. B. G. Casimir. *On the Attraction between Two Perfectly Conducting Plates.* – Proc. Kon. Nederl. Acad. Wet., 1948. – **51**. – P. 793.

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. *Статистическая физика. Теория конденсированного состояния.* – Москва: Наука, 1978. – Т. 9, ч. 2.

A. A. Chumak, P. W. Milonni, and G. P. Berman. *Effects of electrostatic fields and Casimir force on cantilever vibrations.* – Phys. Rev., 2004. – **B 70**, 085407.

Задачі

1. Показати, що після обходу особливої точки $t = ik_\perp \frac{\pi}{a}$ в інтегралі по розрізу (див. праву частину рис. 17) підінтегральна функція змінює знак.

2. Знайти силу електростатичного притягання між металевими пластинами, до яких прикладена різниця потенціалів V_e. Чи зміниться залежність сили притягання від a, якщо фіксованою є не різниця потенціалів, а густина поверхневого заряду?

4. Оператор густини фотонів у фазовому ($\vec{r},\vec{q}$) просторі

4.1. Доцільність введення фотонної функції розподілу

У другому розділі ми визначили оператори кількості частинок (квантів електромагнітного поля) і в окремій моді $\left(\hat{n}_{\vec{k},s}\right)$, і загальної їхньої кількості $\left(\hat{N} = \sum_{\vec{k},s} \hat{n}_{\vec{k},s}\right)$.

Ці оператори характеризують поле в усьому об'ємі системи V, розміри якої можуть бути як завгодно великими, і, взагалі кажучи, фізичні величини, що залежать від $\hat{N}$ чи $\hat{n}_{\vec{k},s}$, не можна виміряти експериментально. До того ж, це не є метою більшості експериментів. Фотодетектори виявляють оптичні поля лише в невеликих об'ємах, обмежених, наприклад, апертурою приймача та довжиною "пробігу" фотонів у фоточутливому шарі. Детектори реагують на наявність поля послідовністю дискретних сигналів (фотовідліків). Уже сам факт дискретності сигналів дає змогу припустити, що реєструються окремі частинки.

До того ж, існуючі детектори реагують на фотони в обмеженому спектральному діапазоні, тобто на фотони лише з певними значеннями енергії, а отже, й імпульсу. Тому природним є запитання, чи можна описувати локальні характеристики оптичних полів на мові частинок з певними значеннями енергій та імпульсів, як це робиться, наприклад, у випадку електронно-йонного газу плазмових середовищ чи електронів та дірок у напівпровідниках? Інакше кажучи, чи можна ввести функцію розподілу фотонів по координатах та імпульсах подібну до функцій розподілу у згаданих випадках? Якби така функція була відома, то можна було б описувати кінетичні властивості саме тих груп фотонів, що зумовлюють спостережувані явища. Наприклад, можна було б знайти локальні значення середньої густини фотонів та енергії оптичного поля, залежність напрямків розповсюдження випромінювання та поляризації хвиль від координат тощо.

Очевидно, не існує оператора, власні значення якого давали б точні значення густини фотонів у якійсь точці фазового ($\vec{r},\vec{q}$) простору. Це зумовлено тим, що оператори координати та імпульсу окремої частинки не комутують між собою. Але така ж проблема щодо означення функції розподілу існує і під час побудови кінетики електронів, дірок тощо. Ці квазічастинки також є квантовими об'єктами, координати й імпульси яких не комутують між собою. Проте суперечливості такого підходу можна уникнути, якщо визначати функції розподілу так, щоб через них знаходити густину частинок не в точці, а всереднені по невеликому фазовому об'єму $(\Delta r \cdot \Delta q)^3$. Немає сенсу брати величину об'єму усереднення надто малою, зокрема меншою від об'єму квантово-механічної невизначеності $(\hbar/2)^3$, оскільки це не зробить опис системи точнішим. Очевидним є також і те, що об'єм усереднення не може бути занадто великим, тому що фізичні величини, знайдені з використанням функцій розподілу, мають з достатньою точністю описувати експериментальні значення. Отже, це мають бути фізично малі об'єми. У більшості випадків цього можна досягти, якщо $\Delta r << l_{ch}$, $\Delta q << q$, де l_{ch} – характерна довжина зміни параметрів випромінювання, а q – характерне значення імпульсів фотонів.

4.2. Оператор густини фотонів у конфігураційному (координатному) просторі

У квантовій теорії фотоелектричних вимірювань, крім операторів народження та знищення фотонів у стані $\vec{k},s$ ($a^{+}_{\vec{k},s}, a_{\vec{k},s}$), широко використовують позитивно-частотний оператор $\vec{V}(\vec{r},t)$, що задається виразом:

$$\vec{V}(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},s}a_{\vec{k},s}\vec{e}_{\vec{k},s}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \quad \omega=ck. \tag{4.1}$$

Аналогічно оператор $a_{\vec{k},s}$ виражається через $\vec{V}(\vec{r},t)$ за допомогою перетворення Фур'є:

$$a_{\vec{k},s}=\frac{1}{\sqrt{V}}\int d\vec{r}e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\vec{e}_{\vec{k},s}\vec{V}(\vec{r},t). \tag{4.2}$$

Існує також визначення інтенсивності фізичної величини:

$$\hat{I}(\vec{r},t)=\vec{V}^{+}(\vec{r},t)\vec{V}(\vec{r},t).$$

Легко побачити, що оператор повної кількості фотонів є інтегралом від $\hat{I}(\vec{r},t)$ по об'єму системи:

$$\hat{N}=\int d\vec{r}\hat{I}(\vec{r},t). \tag{4.3}$$

Якщо $\hat{N}$ – сумарна (по всьому об'єму) кількість фотонів, то рівняння (4.3) вказує на те, що $\hat{I}(\vec{r},t)$ має ознаки оператора локальної (в точці $\vec{r}$) густини фотонів. Усі моди електромагнітного поля, що існують в об'ємі V, дають внесок в оператор $\hat{I}(\vec{r},t)$.

Використовуючи вираз (4.1), оператор $\hat{I}$ можна записати у зручнішому для подальшого аналізу вигляді:

$$\hat{I}(\vec{r},t)=\frac{1}{V}\sum_{\vec{q},\vec{k},s,s'}e^{-i\vec{k}\vec{r}}a^{+}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s}a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s'}\vec{e}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s}\vec{e}_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s'}, \tag{4.4}$$

де для скорочення запису ми внесли часові множники $e^{\pm i\omega t}$ відповідно в оператори a^{+} та a.

Легко переконатися в тому, що стан, який одержується в результаті дії оператора $\vec{V}^{+}(\vec{r},t)$ (ермітово спряженого оператору $\vec{V}(\vec{r},t)$) на вакуумний стан $|0\rangle$, є власним станом оператора $\hat{N}$:

$$\begin{aligned}\hat{N}\vec{V}^{+}(\vec{r},t)|0\rangle&=\sum_{\vec{q},s}a^{+}_{\vec{q},s}a_{\vec{q},s}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k},s'}e^{-i\vec{k}\vec{r}}a^{+}_{\vec{k},s'}\vec{e}_{\vec{k},s'}|0\rangle=\\&=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{q},s}e^{-i\vec{q}\vec{r}}a^{+}_{\vec{q},s}\vec{e}_{\vec{q},s}|0\rangle=1\times\vec{V}^{+}(\vec{r},t)|0\rangle\end{aligned}, \tag{4.5}$$

а відповідне власне значення дорівнює одиниці. Під час одержання рівняння (4.5) враховано, що

$$a_{\vec{q},s}a^{+}_{\vec{k},s'}|0\rangle=\delta_{\vec{q},\vec{k}}\delta_{s,s'}|0\rangle.$$

Як бачимо, оператор $\vec{V}^{+}(\vec{r},t)$ "народжує" з вакууму одну частинку, яку, поки що умовно, називатимемо фотоном. Такий фотон рівномірно "розмазаний" по всіх модах електромагнітного поля. Питання просторової локалізації цієї частинки розглянемо далі.

Множники біля експонент у (4.4) можна трактувати як коефіцієнти розкладу $\hat{I}(\vec{r},t)$ в ряд Фур'є по ортогональних функціях $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$. Члени з великими $|\vec{k}|$ описують ті складові поля, що швидко змінюються у просторі. Проте ми вже зазначали, що в багатьох експериментах важливе значення мають тільки певні характерні значення хвильових векторів, а саме – тільки діапазон малих значень $\left|\vec{k}\right|$. Наприклад, випромінювання, що генерує лазер, поширюється у вигляді пучка, діаметр (d) якого значно більший від довжини хвилі $\lambda = \frac{2\pi}{q}$.

Докладна інформація про профіль пучка міститься в членах ряду, в яких $k \sim \pi / d << 2\pi / \lambda$. Тоді для розрахунку просторової характеристики пучка досить обмежитись у сумі по $\vec{k}$ значеннями, меншими за величиною за якесь k_0. Останнє має задовольняти нерівності:

$$\frac{\pi}{d} << k_0 << \frac{2\pi}{\lambda}.$$

У можливості такого вибору легко пересвідчитись, розглядаючи, наприклад, видиме світло з довжиною хвилі $\lambda = 0{,}5$ мк, що виходить із джерела, апертура якого $d = 1$ см. Тоді завжди можна вибрати якесь значення k_0, що знаходиться в широкому діапазоні $3 \text{ см}^{-1} << k_0 << 10^5 \text{ см}^{-1}$. Такий спрощений опис густини частинок, яким враховується внесок в оператор густини лише низьких просторових гармонік, ми використаємо далі.

Зазначимо, що у праці Манделя (1966) процедура вилучення високих гармонік реалізовувалась по-іншому. Він запропонував усереднювати вираз (4.4) по невеликому конфігураційному об'єму $\mho$ ($\mho = l_x \times l_y \times l_z << V$). За наведеними вище міркуваннями, довжини l_i мають бути значно

меншими від характерних довжин у конкретних системах (наприклад, d), і водночас $l_i >> \lambda$.

Отже, оператор кількості частинок в об'ємі $\mho$ Мандель визначав як

$$\hat{n}(\mho, t) = \int\limits_{\mho} d\vec{r}\hat{I}(\vec{r}, t) = \int\limits_{\mho} d\vec{r}\vec{V}^{+}(\vec{r}, t)\vec{V}(\vec{r}, t), \tag{4.6}$$

де інтегрування здійснюється по об'єму $\mho$ поблизу якоїсь точки конфігураційного простору. Після такої процедури оператор (4.6), на відміну від оператора (4.4), даватиме "загрублений" (coarse-grained) опис густини фотонів. Оператор (4.6) відомий у літературі як оператор Манделя. У тому, що в цей оператор вже не входять високі гармоніки, можна переконатись, проінтегрувавши експоненту $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$, що входить у вираз (4.4), по одній із змінних, наприклад, по координаті x, в межах об'єму $\mho$:

$$\int\limits_{-l_x/2}^{l_x/2} dx' e^{-ik_x(x+x')} = l_x e^{-ik_x x} \frac{\sin(k_x l_x / 2)}{k_x l_x / 2}. \tag{4.7}$$

Видно, що величина дробу в правій частині (4.7) прямує до нуля, коли $|k_x| >> 2 / l_x$. Отже, внеском членів з великими значеннями k можна знехтувати.

При нашому методі вилучення внеску високих гармонік ми, як уже зазначалось вище, замість інтегрування по об'єму $\mho$ обмежимо суму по $k_{x,y,z}$ у (4.4) якимось значенням k_0, яке за порядком величини може дорівнювати $\pi/\mho^{1/3}$. Якщо $l_x = l_y = l_z = l$, то $k_0 = \pi/l$. Тоді "загрублений" оператор густини матиме вигляд:

$$\hat{n}(\vec{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\substack{\vec{q}, \vec{k}, s, s' \\ k < k_0}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a^{+}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}, s} a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}, s'} \vec{e}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}, s} \vec{e}_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}, s'}. \tag{4.8}$$

Тут і далі умову $|k_x|, |k_y|, |k_z| < k_0$ позначимо скороченим записом $k < k_0$.

Оскільки $k << q$, то можна дещо спростити вираз (4.8). Враховуючи, що

$$\vec{e}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s} \approx \vec{e}_{\vec{q},s}, \quad \vec{e}_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s'} \approx \vec{e}_{\vec{q},s'}, \tag{4.9}$$

а також ортогональність векторів $\vec{e}_{\vec{q},s}$ та $\vec{e}_{\vec{q},s'}$ з різними s ($\vec{e}_{\vec{q},s}\vec{e}_{\vec{q},s'} = \delta_{s,s'}$), формула (4.8) зводиться до:

$$\hat{n}(\vec{r},t) = \frac{1}{V}\sum_{\substack{\vec{q},s \\ k<k_0}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s} a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s}. \tag{4.10}$$

Як бачимо, оператор $\hat{n}(\vec{r},t)$ відрізняється від "точного" оператора густини $\hat{I}(\vec{r},t)$ тим, що охоплює незначну, хоча й найважливішу для практичних застосувань ділянку хвильових векторів $\vec{k}$. З фізичного погляду оператор $\hat{n}$ еквівалентний оператору Манделя (з точністю до множника $1/\mho$):

$$\hat{n}(\vec{r},t) \to \frac{1}{\mho}\hat{n}(\mho,t). \tag{4.11}$$

Крім фізичної подібності, вони мають схожі математичні властивості. Наприклад, обидва оператори комутують з оператором повної кількості частинок:

$$\left[\hat{n}(\vec{r},t), \hat{N}\right] = \left[\frac{1}{\mho}\hat{n}(\mho,t), \hat{N}\right] = 0.$$

Тут і далі знаходження комутаторів добутків декількох операторів значно спрощується, якщо використати очевидну тотожність (правило Лейбніца):

$$\begin{aligned}\left[\hat{\alpha}_1 \cdot \hat{\alpha}_2 \cdot \ldots \hat{\alpha}_m, \hat{c}\right] &= \left[\hat{\alpha}_1, \hat{c}\right] \cdot \hat{\alpha}_2 \cdot \ldots \hat{\alpha}_m + \\ &+ \hat{\alpha}_1 \cdot \left[\hat{\alpha}_2, \hat{c}\right] \cdot \ldots \hat{\alpha}_m + \ldots \\ &+ \hat{\alpha}_1 \cdot \hat{\alpha}_2 \cdot \ldots \hat{\alpha}_{m-1} \cdot \left[\hat{\alpha}_m, \hat{c}\right].\end{aligned} \tag{4.12}$$

Комутатор операторів густини фотонів у різних точках

$$\left[\hat{n}(\vec{r},t), \hat{n}(\vec{r}\,',t)\right] =$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum_{\substack{\vec{q},\vec{q}\,',s,s' \\ k,k'<k_0}} e^{-i(\vec{k}\vec{r}+\vec{k}'\vec{r}\,')}\left[a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s} a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s}, a^+_{\vec{q}\,'+\frac{\vec{k}'}{2},s'} a_{\vec{q}\,'-\frac{\vec{k}'}{2},s'}\right] =$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum_{\substack{\vec{q},s \\ k,k'<k_0}} e^{-i(\vec{k}\vec{r}+\vec{k}'\vec{r}\,')}\left(a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s} a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}-k',s} - a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}+\vec{k}',s} a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s}\right) \tag{4.13}$$

дорівнює нулеві, оскільки після заміни у другому члені в круглих дужках (4.13) $\vec{q} \to \vec{q} - \vec{k}'$ він скоротиться з першим.

Отже,

$$\left[\hat{n}(\vec{r},t), \hat{n}(\vec{r}\,',t)\right] = 0. \tag{4.14}$$

Одержана рівність не залежить від вибору значення k_0, тобто від ступеня "загрублення" оператора густини. Комутатор аналогічних операторів Манделя лише наближено дорівнює нулеві.

Під час подальшого розгляду нам будуть потрібні величини комутаторів $\hat{n}$ та $\hat{V}^{+}$:

$$\begin{aligned}&\left[\hat{n}(\vec{r}),\vec{V}^{+}(\vec{r}\,')\right]=\\&=\frac{1}{V^{3/2}}\sum_{\substack{\vec{q},\vec{q}\,',s,s'\\k<k_0}}e^{-i(\vec{k}\vec{r}+\vec{q}\,'\vec{r}\,')}\left[a^{+}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s}a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s},\vec{e}_{\vec{q}\,'s'}a^{+}_{\vec{q}\,',s'}\right]=\\&=\frac{1}{V^{3/2}}\sum_{\substack{\vec{q},s\\k<k_0}}e^{-i(\vec{k}\vec{r}+\vec{q}\vec{r}\,')}\vec{e}_{\vec{q}s}a^{+}_{\vec{q}+\vec{k},s}\end{aligned}\qquad(4.15)$$

Замінюючи в останній сумі $\vec{q}\to\vec{q}-\vec{k}$, а також $\vec{e}_{\vec{q}-\vec{k}}\approx\vec{e}_{\vec{q}}$, одержимо

$$\left[\hat{n}(\vec{r}),\vec{V}^{+}(\vec{r}\,')\right]\approx\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}\,')\vec{V}^{+}(\vec{r}\,'),\qquad(4.16)$$

де

$$\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{V}\sum_{k<k_0}e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\qquad(4.17)$$

є функцією, яка в граничному випадку $k_0\to\infty$ переходить у δ-функцію Дірака.

За скінченних значень k_0 вона дорівнює:

$$\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}\,')=\qquad(4.18)$$

$$=\left(\frac{k_0}{\pi}\right)^3\frac{\sin\left(k_0(x-x')\right)}{k_0(x-x')}\cdot\frac{\sin\left(k_0(y-y')\right)}{k_0(y-y')}\cdot\frac{\sin\left(k_0(z-z')\right)}{k_0(z-z')}$$

і досягає найбільшого значення, що дорівнює $(k_0/\pi)^3$, якщо $x=x', y=y', z=z'$. Об'єм локалізації функції (4.17) є величиною порядку $\left(1/k_0\right)^3$, що, користуючись термінологією Манделя, дає змогу вважати оператори $\vec{V}^{+}$ та $\hat{n}$ "приблизно δ-корельованими".

Комутатор операторів $\hat{n}$ та $\vec{V}$ легко можна знайти з виразу (4.16), якщо до останнього застосувати операцію ермітового спряження. Відтак одержимо:

$$\left[\hat{n}(\vec{r}),\vec{V}(\vec{r}\,')\right]\approx-\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}\,')\vec{V}(\vec{r}\,').\qquad(4.19)$$

Зазначимо, що під час обчислення комутаторів (4.16) та (4.19) вважали, що всі оператори задані в один і той же момент часу. Далі комутатор (4.16) буде використаний для знаходження власних значень і власних функцій оператора густини фотонів.

4.3. Власні значення та власні функції оператора густини фотонів

Питання про власні значення оператора густини фотонів є важливим з погляду фізичної інтерпретації і $\hat{n}(\vec{r})$, і $\vec{V}^{+}(\vec{r})$. Розглянемо послідовну дію цих двох операторів на вакуумний стан $|0\rangle$:

$$\begin{aligned}&\hat{n}(\vec{r},t)\vec{V}^{+}(\vec{r}\,',t)|0\rangle=\\&=\left(\left[\hat{n}(\vec{r}),\ \vec{V}^{+}(\vec{r}\,')\right]+\vec{V}^{+}(\vec{r}\,')\,\hat{n}(\vec{r})\right)|0\rangle.\end{aligned}\qquad(4.20)$$

Очевидно, що $\hat{n}(\vec{r})|0\rangle=0$ і тоді внесок другого члена у великих круглих дужках дорівнює нулеві. Враховуючи відоме значення комутатора (4.16), рівняння (4.20) перепишемо у вигляді:

$$\hat{n}(\vec{r})\vec{V}^{+}(\vec{r}\,')|0\rangle=\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}\,')\vec{V}^{+}(\vec{r}\,')|0\rangle.\qquad(4.21)$$

Як бачимо, функція $\hat{V}^{+}(\vec{r}')|0\rangle$ є власною функцією оператора густини $\hat{n}(\vec{r})$. Відповідне власне значення дорівнює $\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}')$. Загрублений характер оператора густини $\hat{n}(\vec{r})$ виражається в тому, що власне значення $\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}')$ локалізоване не в точці, а в невеликому об'ємі, величина якого порядку l^3.

Якщо добуток N операторів $V_i^{+}(\vec{r}_j)$ діє на вакуумний стан (індекс i вказує на одну з можливих компонент x, y, z вектора $\vec{V}^{+}$, а $j = 1, 2, \ldots N$ нумерує аргументи операторів $\vec{V}^{+}$), то можна очікувати народження фотонів у точках $\vec{r}_j$. Використовуючи вже знайдену величину комутатора $\hat{n}(\vec{r})$ з $V_i^{+}(\vec{r}_j)$ (рівняння (4.16)), покажемо, що функція

$$V_{i_1}^{+}(\vec{r}_1)V_{i_2}^{+}(\vec{r}_2)\ldots V_{i_N}^{+}(\vec{r}_N)|0\rangle \qquad (4.22)$$

є власною функцією оператора $\hat{n}(\vec{r})$ з власним значенням

$$\sum_{j=1}^{N}\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_j) \equiv \rho(\vec{r}). \qquad (4.23)$$

Дію оператора $\hat{n}(\vec{r})$ на хвильову функцію (4.22) виразимо співвідношенням, яке аналогічне виразу (4.20):

$$\hat{n}(\vec{r})V_{i_1}^{+}(\vec{r}_1)V_{i_2}^{+}(\vec{r}_2)\ldots V_{i_N}^{+}(\vec{r}_N)|0\rangle =$$

$$= \left[\hat{n}(\vec{r}), V_{i_1}^{+}(\vec{r}_1)V_{i_2}^{+}(\vec{r}_2)\ldots V_{i_N}^{+}(\vec{r}_N)\right]|0\rangle +$$

$$+ V_{i_1}^{+}(\vec{r}_1)V_{i_2}^{+}(\vec{r}_2)\ldots V_{i_N}^{+}(\vec{r}_N)\hat{n}(\vec{r})|0\rangle. \qquad (4.24)$$

Другий член у правій частині (4.24) дорівнює нулеві. Значення комутатора можна легко знайти, використовуючи правило (4.12) та рівняння (4.16). Тоді легко одержимо:

$$\hat{n}(\vec{r})V_{i_1}^{+}(\vec{r}_1)V_{i_2}^{+}(\vec{r}_2)\ldots V_{i_N}^{+}(\vec{r}_N)|0\rangle =$$

$$= \rho(\vec{r})V_{i_1}^{+}(\vec{r}_1)V_{i_2}^{+}(\vec{r}_2)\ldots V_{i_N}^{+}(\vec{r}_N)|0\rangle, \qquad (4.25)$$

де $\rho(\vec{r})$ визначається виразом (4.23).

Із рівняння (4.25) випливає, що функція (4.22) є наближеною власною функцією оператора густини фотонів. Відповідне власне значення $\rho(\vec{r})$ можна інтерпретувати як густину фотонів у точці $\vec{r}$. Легко переконатись, що повна кількість народжених частинок, тобто $\int d\vec{r}\,\rho(\vec{r})$, дорівнює, як і слід було чекати, N.

Небажаною властивістю оператора густини, яка виявляється під час опису за його допомогою оптичних полів, – це те, що в означення $\hat{n}(\vec{r})$ (4.10) входять фотонні оператори з усіма можливими значеннями хвильових векторів $\vec{q}$. У цьому можна побачити певну "нефізичність" оператора $\hat{n}(\vec{r})$, оскільки і під час проведення експериментів, і під час аналітичних розрахунків актуальними є лише обмежені ділянки частот (а, отже, й $\vec{q}$). Тому перехід до опису динамічних та статистичних характеристик електромагнітного поля за допомогою функції розподілу фотонів у фазовому просторі (а не лише в координатному) виглядає цілком логічним і раціональним. Так можна (як побачимо далі) вилучити з розгляду "зайві" моди електромагнітного поля. Це дає змогу оперувати лише з тими модами, що дають значний внесок у фізичні величини, які вимірюють у процесі експерименту.

4.4. Означення оператора густини фотонів у фазовому $(\vec{r},\vec{q})$ просторі

Оператор густини фотонів, який введено у попередньому параграфі, був виражений через оператори народження та знищення так:

$$\hat{n}(\vec{r},t)=\frac{1}{V}\sum_{\substack{\vec{q},s\\ k<k_0}} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a^{+}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s}\, a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s}\,, \qquad (4.26)$$

де оператор густини залежить від часу внаслідок залежності від часу операторів a^{+},a :

$$a^{+}_{\vec{q},s}(t)=a^{+}_{\vec{q},s}(0)e^{i\omega_{\vec{q}}t}, \quad a_{\vec{q},s}(t)=a_{\vec{q},s}(0)e^{-i\omega_{\vec{q}}t}. \qquad (4.27)$$

Вирази (4.27) означають, що оператори у (4.26) задані в представленні Гейзенберга, наприклад,

$$a(t)=e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}a(0)e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}, \qquad (4.28)$$

де H – гамільтоніан системи.

Введемо позначення

$$f_s(\vec{r},\vec{q},t)=\frac{1}{V}\sum_{k<k_0} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a^{+}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2},s}\, a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2},s}\,. \qquad (4.29)$$

Тоді оператор $\hat{n}(\vec{r},t)$ виражається через $f_s(\vec{r},\vec{q},t)$ як

$$\hat{n}(\vec{r},t)=\sum_{\vec{q},s} f_s(\vec{r},\vec{q},t). \qquad (4.30)$$

Як бачимо, оператор $f_s(\vec{r},\vec{q},t)$ визначає внесок фотонів з різними значеннями $\vec{q},s$ в оператор фотонної густини $\hat{n}$. Як і в попередньому розгляді, можна припустити, що

$f_s(\vec{r},\vec{q},t)$ – це оператор густини фотонів у фазовому ($\vec{r},\vec{q}$) просторі. На користь такої інтерпретації свідчить і те, що

$$\int d\vec{r}\, f_s(\vec{r},\vec{q},t)=\hat{n}_{\vec{q},s}. \qquad (4.31)$$

Вираз (4.31) означає, що інтегральне (по $\vec{r}$) значення $f_s(\vec{r},\vec{q},t)$ дорівнює кількості фотонів у моді $\vec{q},s$ (як і має бути у тому випадку, якщо б функція $f_s(\vec{r},\vec{q},t)$, справді, є оператором густини фотонів у фазовому просторі). Отже, обидві властивості (4.30) та (4.31) свідчать на користь припущення, що $f_s(\vec{r},\vec{q},t)$ є оператором густини фотонів у фазовому просторі.

4.5. Власні значення та власні функції оператора густини фотонів у фазовому просторі

Визначимо оператор $V^{+}(\vec{r},\vec{q},t)$ за допомогою співвідношення:

$$V^{+}(\vec{r},\vec{q},t)=C\sum_{q'<k_0} e^{-i(\vec{q}+\vec{q}')\vec{r}} a^{+}_{\vec{q}+\vec{q}'}\,. \qquad (4.32)$$

Тут і далі для скорочення запису опускатимемо змінну, що характеризує поляризацію світлових хвиль s . Сталу C знайдемо з умови, що хвильова функція системи після дії оператора $V^{+}(\vec{r},\vec{q},t)$ на вакуумний стан є нормованою

$$\langle 0|V(\vec{r},\vec{q})V^{+}(\vec{r},\vec{q})|0\rangle=1, \qquad (4.33)$$

де $V(\vec{r},\vec{q})=\left(V^{+}(\vec{r},\vec{q})\right)^{+}$.

Підставляючи (4.32) в (4.33), одержимо

$$|C|^2 \sum_{q'<k_0} 1 = |C|^2 V\left(\frac{k_0}{\pi}\right)^3 = 1, \qquad (4.34)$$

звідки випливає, що $C = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{\pi}{k_0}\right)^{3/2}$.

Легко переконатись, що оператор $V^+(\vec{r}, \vec{q}, t)$ (як і введений на початку розділу оператор $\vec{V}^+(\vec{r}, t)$), діючи на вакуумний стан, народжує одну частинку:

$$\hat{N}V^+(\vec{r}, \vec{q}, t)|0\rangle = 1 \times V^+(\vec{r}, \vec{q}, t)|0\rangle. \qquad (4.35)$$

На відміну від оператора $\hat{V}^+(\vec{r})$, який генерує один фотон у точці $\vec{r}$, розподілений по усіх модах поля, стан $V^+(\vec{r}, \vec{q})|0\rangle$ розподілений лише в інтервалі $q' < k_0$ в околі вектора $\vec{q}$. Просторову структуру цього стану можна з'ясувати, подіявши на нього оператором густини (4.26):

$$\hat{n}(\vec{r})V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1)|0\rangle =$$

$$= \frac{C}{V}\sum_{k,q'<k_0}\sum_{\vec{q}} e^{-i\vec{k}\vec{r} - i(\vec{q}_1+\vec{q}')\vec{r}_1} a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}} a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}} a^+_{\vec{q}_1+\vec{q}'}|0\rangle =$$

$$= \frac{C}{V}\sum_{k,q'<k_0} e^{-i\vec{k}\vec{r} - i(\vec{q}_1+\vec{q}')\vec{r}_1} a^+_{\vec{q}_1+\vec{q}'+\vec{k}}|0\rangle =$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k<k_0} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r})} V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1+\vec{k})|0\rangle \approx$$

$$\approx \tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_1)V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1)|0\rangle. \qquad (4.36)$$

де ми знехтували малим значенням k порівняно з q_1 і використали позначення (4.17).

Як видно з рівняння (4.36), функцію $V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1)|0\rangle$ можна вважати наближеною власною функцією оператора густини фотонів. Відповідне власне значення $\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_1)$ свідчить про те, що вона локалізована в об'ємі з характерним розміром $1/k_0$. Враховуючи також і те, що в стані $V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1)|0\rangle$ фотон є "розмазаним" по окремих модах, хвильові вектори яких знаходяться в діапазоні $\Delta q \sim k_0$, об'єм локалізації народженого фотона у фазовому просторі є величиною порядку $(\Delta r \Delta q)^3 \sim 1$. Це повністю узгоджується з принципом невизначеності. Зауважимо, що хоча величина $\vec{q}$ збігається з фотонним імпульсом лише в системі одиниць, де $\hbar = 1$, ми деколи не зважатимемо на це і називатимемо $\vec{q}$ імпульсом.

Як і в попередньому випадку, можна показати, що з точністю до членів порядку k/q функція $V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1)|0\rangle$ є власною функцією оператора $f(\vec{r}, \vec{q}, t)$. Знайдемо відповідне власне значення. Для цього подіємо оператором $f(\vec{r}, \vec{q}, t)$ на функцію $V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1)|0\rangle$:

$$f(\vec{r}, \vec{q})V^+(\vec{r}_1, \vec{q}_1)|0\rangle =$$

$$= \frac{C}{V}\sum_{k,q'<k_0} e^{-i\vec{k}\vec{r} - i(\vec{q}_1+\vec{q}')\vec{r}_1} a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}} a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}} a^+_{\vec{q}_1+\vec{q}'}|0\rangle =$$

$$= \frac{C}{V}\sum_{k,q'<k_0} \delta_{\vec{q}_1+\vec{q}', \vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}} e^{-i\vec{k}\vec{r} - i(\vec{q}_1+\vec{q}')\vec{r}_1} a^+_{\vec{q}_1+\vec{q}'+\vec{k}}|0\rangle \approx$$

$$\approx \frac{C}{V}\delta_{\vec{q}_1, \vec{q}} \sum_{k,q'<k_0} e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1) - i(\vec{q}_1+\vec{q}'+\vec{k})\vec{r}_1} a^+_{\vec{q}_1+\vec{q}'+\vec{k}}|0\rangle =$$

$$=\frac{1}{V}\delta_{\vec{q}_1,\vec{q}}\sum_{k<k_0}e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}V^+(\vec{r}_1,\vec{q}_1+\vec{k})\left|0\right\rangle\approx$$

$$\approx\frac{1}{V}\delta_{\vec{q}_1,\vec{q}}\sum_{k<k_0}e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_1)}V^+(\vec{r}_1,\vec{q}_1)\left|0\right\rangle=$$

$$=\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta_{\vec{q}_1,\vec{q}}V^+(\vec{r}_1,\vec{q}_1)\left|0\right\rangle. \tag{4.37}$$

Як бачимо, наближеній власній функції $V^+(\vec{r}_1,\vec{q}_1)\left|0\right\rangle$ оператора $f(\vec{r},\vec{q})$ відповідає власне значення $\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_1)\delta_{\vec{q},\vec{q}_1}$. Наближені власні значення та власні функції оператора фотонної густини у фазовому просторі були знайдені у праці автора та Сушкової (2012).

Якщо в системі є N частинок у різних станах, то відповідна хвильова функція дорівнює

$$\left|N\{\vec{r}_i,\vec{q}_i\}\right\rangle=\prod_{i=1}^{N}V^+(\vec{r}_i,\vec{q}_i)\left|0\right\rangle. \tag{4.38}$$

Після дії оператора f на хвильову функцію $\left|N\right\rangle$ одержимо вираз, що є узагальненням формули (4.37) на випадок N фотонів:

$$f(\vec{r},\vec{q})\left|N\{\vec{r}_i,\vec{q}_i\}\right\rangle=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta_{\vec{q},\vec{q}_i}\left|N\{\vec{r}_i,\vec{q}_i\}\right\rangle, \tag{4.39}$$

де власній функції $\left|N\{\vec{r}_i,\vec{q}_i\}\right\rangle$ оператора $f(\vec{r},\vec{q},t)$ відповідає власне значення

$$\rho(\vec{r},\vec{q})=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta_{\vec{q},\vec{q}_i}. \tag{4.40}$$

Формула (4.39) є аналогом формули (4.25), але вже для фазового ($\vec{r},\vec{q}$)-простору.

Досі вважали, що всі оператори задані в один і той же момент часу. Якщо ж частинки були “народжені” з вакууму в момент часу $t=0$ ($V^+(\vec{r}_i,\vec{q}_i,t=0)$), то власні значення $f(\vec{r},\vec{q},t>0)$ будуть іншими. Щоб їх знайти, врахуємо, що часова залежність операторів у виразі для f має вигляд:

$$\begin{aligned}&a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}}\Big|_t=e^{i(\omega_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}-\omega_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}})t}a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}}\Big|_{t=0}\approx\\&\approx e^{i\vec{k}\vec{c}_{\vec{q}}t}a^+_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}}\Big|_{t=0}\end{aligned}, \tag{4.41}$$

де $\vec{c}_{\vec{q}}=\dfrac{\partial\omega_q}{\partial\vec{q}}$.

Тоді, враховуючи співвідношення (4.41), замість виразу (4.39) одержимо:

$$\begin{aligned}&f(\vec{r},\vec{q},t)\left|N\{\vec{r}_i,\vec{q}_i,t=0\}\right\rangle=\\&=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_i-\vec{c}_{\vec{q}_i}t)\delta_{\vec{q},\vec{q}_i}\left|N\{\vec{r}_i,\vec{q}_i,t=0\}\right\rangle,\end{aligned} \tag{4.42}$$

де власне значення

$$\rho(\vec{r},\vec{q},t)=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\delta}(\vec{r}-\vec{r}_i-\vec{c}_{\vec{q}_i}t)\delta_{\vec{q},\vec{q}_i} \tag{4.43}$$

вже залежить від часу внаслідок зміщення фотонів на відстань $\vec{c}_{\vec{q}_i}t$ від місця їхнього народження.

Вираз (4.43) є таким же, як і вираз для густини у фазовому просторі класичних точкових частинок, що не взаємодіють між собою і рухаються з швидкостями $\vec{c}_{\vec{q}_i}$. Відповідну функцію ще називають мікроскопічною функцією розподілу. Наш розгляд показує, що існує значна аналогія між класичним та фотонним газом. Ця подібність наводить на думку, що фотонний газ можна описувати кінетичним рівнянням, яке має такий же вигляд, як і в класичній фізиці.

Розглянемо докладніше це питання в наступному параграфі.

4.6. Кінетичне рівняння для функції розподілу фотонів у фазовому просторі

У загальному випадку еволюція оператора $f(\vec{r},\vec{q},t)$ у представленні Гейзенберга визначається комутатором f з гамільтоніаном H:

$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{q},t)}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}\left[f(\vec{r},\vec{q},t),\mathrm{H}\right]. \qquad (4.44)$$

Для гамільтоніана, заданого виразом (2.41), легко одержимо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\vec{r},\vec{q},t)}{\partial t}&=\frac{i}{V}\sum_{k<k_0}\left(\omega_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}-\omega_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}}\right)e^{-i\vec{k}\vec{r}}a^{+}_{\vec{q}+\frac{\vec{k}}{2}}a_{\vec{q}-\frac{\vec{k}}{2}}\approx\\ &\approx-\frac{\partial\omega_{\vec{q}}}{\partial\vec{q}}\frac{\partial f(\vec{r},\vec{q},t)}{\partial\vec{r}}\end{aligned}, \qquad (4.45)$$

де ми скористались тим, що $k<<q$, і розклали різницю частот у круглих дужках (як і у виразі (4.41)) по $\vec{k}$ до перших незникаючих членів.

Перепишемо (4.45) у вигляді:

$$\left(\partial_t+\vec{c}_{\vec{q}}\partial_{\vec{r}}\right)f\left(\vec{r},\vec{q},t\right)=0. \qquad (4.46)$$

Зазначимо, що такий вигляд рівняння для f ми змогли одержати, припустивши, що $k\le k_0<<q$, тобто вважаючи, що f незначно змінюється на довжинах, порядку

$(\pi/k_0)>>\lambda$. Якщо значення $k_0\to\infty$, то еволюцію f уже не можна описати рівнянням (4.46).

Очевидно, що (4.46) можна інтерпретувати як кінетичне рівняння для фотонів у вакуумі. Якщо ж на останні діє стороння “сила” $\vec{F}(\vec{r})$, то вигляд кінетичного рівняння зміниться. Ефективна сила може бути результатом неоднорідності показника заломлення середовища $n(\vec{r})$, в якому поширюється випромінювання (див. працю автора та Бермана за 2006 рік). Наприклад, показник заломлення атмосфери зменшується з віддаленням від поверхні Землі. До того ж, в атмосфері постійно циркулюють і переміщуються вихори, що зумовлюють флуктуації її густини, а отже, й флуктуації показника заломлення. В оптичних волокнах поява сили може бути зумовлена структурними неоднорідностями, які можуть бути як статичними (зумовленими, наприклад, недосконалістю технологій виготовлення волокон, їхнім згином під час прокладання комунікаційних ліній тощо), чи динамічними (зумовленими коливаннями атомів, що утворюють волокно). Якщо показник заломлення мало змінюється на відстані порядку довжини хвилі, то у кожному з цих випадків сила пропорційна до його градієнта $\left(\vec{F}\sim\partial n/\partial\vec{r}\right)$.

За наявності сили кінетичне рівняння набуває вигляду:

$$\left[\partial_t+\vec{c}_{\vec{q}}\partial_{\vec{r}}+\vec{F}(\vec{r})\partial_{\vec{q}}\right]f(\vec{r},\vec{q},t)=0. \qquad (4.47)$$

Тут $\vec{c}_{\vec{q}}$ – швидкість світла вже не у вакуумі, а в середовищі, і тому залежить від його показника заломлення (чи діелектричної функції). Рівняння (4.47) відображає умову збереження кількості частинок у процесі їхнього переміщення. Наприклад, для будь-якої функції розподілу в одновимірному випадку швидкість зміни кількості частинок у ділянці шириною Δx (рис. 19), очевидно, дорівнює

$$\partial_t f(x)\Delta x = \upsilon_x f(x) - \upsilon_x f(x+\Delta x) =$$
$$= -\upsilon_x \partial_x f(x)\Delta x\,. \tag{4.48}$$

Поділивши всі члени на Δx, одержимо ту частину кінетичного рівняння, яке описує перші два члени в квадратних дужках рівняння (4.47). Якщо врахувати, що сила $\vec{F}(\vec{r})$ є не що інше, як швидкість зміни імпульсу (тобто є аналогом швидкості в конфігураційному просторі), то третій член можна одержати з таких же міркувань, що й другий.

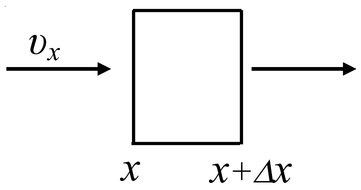

Рис. 19. x та υ_x – координата та швидкість частинки

Загальний розв’язок кінетичного рівняння має вигляд:

$$f(\vec{r},\vec{q},t) = f\left(\vec{r} - \int_{t_0}^{t} \dot{\vec{r}}(t')dt', \vec{q} - \int_{t_0}^{t} \dot{\vec{q}}(t')dt', t_0\right), \tag{4.49}$$

де $f(\vec{r},\vec{q},t_0)$ – значення f у якийсь момент часу t_0.

Легко побачити, що, коли $t = t_0$, то права частина (4.49) є такою ж, як і ліва, тобто задовольняються початкові умови.

Щоб знайдений розв’язок задовольняв кінетичне рівняння, треба, щоб функції $\vec{r}(t')$ та $\vec{q}(t')$ були розв’язками рівнянь руху

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t') &= \vec{c}\left(\vec{q}(t')\right) \\ \dot{\vec{q}}(t') &= \vec{F}\left(\vec{r}(t')\right) \end{aligned} \tag{4.50}$$

з початковими умовами $\vec{r}(t'=t) = \vec{r}$ та $\vec{q}(t'=t) = \vec{q}$.

У цьому випадку $\vec{c}\left(\vec{q}(t'=t)\right) = \vec{c}_{\vec{q}}$, $\vec{F}\left(\vec{r}(t'=t)\right) = \vec{F}\left(\vec{r}\right)$ і тоді рівняння (4.47) задовольняється.

Маючи розв’язок (4.49), можна легко знайти, якою буде фотонна густина в момент часу t у випадку, коли початковий розподіл задається виразом (4.38). Припустивши, що $t_0 = 0$, і враховуючи, що оператори в правій частині рівняння (4.49) також задані в той же момент $t_0 = 0$, легко знаходимо:

$$\rho(\vec{r},\vec{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\delta}(\vec{r} - \vec{r}_i(t))\delta_{\vec{q},\vec{q}_i(t)}\,, \tag{4.51}$$

де $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_i + \int_0^t dt'\vec{c}(\vec{q}(t'))$, $\vec{q}_i(t) = \vec{q}_i + \int_0^t dt'\vec{F}(\vec{r}(t'))$.

Як бачимо, рух частинок описується такими ж рівняннями, як і еволюція f (рівняннями (4.50)). Тому система рівнянь (4.50) є не що інше як рівняння Ньютона для частинок, що рухаються із швидкістю $\vec{c}_{\vec{q}}$ і на які діє сила $\vec{F}(\vec{r})$. У нашому випадку – це фотони, що рухаються в середовищі зі змінним показником заломлення. Як бачимо, рівняння класичної механіки (рівняння Ньютона!) описують поширення світла. Розв’язки цих рівнянь визначають траєкторії частинок. У свою чергу, траєкторії частинок визначають еволюцію функції розподілу $f(\vec{r},\vec{q},t)$ так само, як і в класè÷í îì ó ãàç³ (äèâ. çàäà÷ó **1**). Проте це не дає підстав вважати, що газ фотонів є класичною системою. Досить вказати на те, що об'єм фазового простору, де вони локалізовані $(\Delta r\Delta q)^3$, не може бути меншим ніж $(1/2)^3$. До того ж, на відміну від класичної фізики під час взаємодії фотонів з речовиною можливі процеси їхнього народження та знищення. Важливою є і та обставина, що статистичні властивості фотонного газу описуються середніми від квантово-механічних операторів, які, як видно з формули (4.49), залежать від властивостей джерела випромінювання та флуктуаційних властостей середовища, де воно поширюється. Обидва ці чинники також можуть бути суто квантової природи.

Важливим практичним результатом цього розділу є те, що коли значення $f(t_0)$ відоме, то можна легко знайти розподіл фотонів у будь-який інший момент часу. В цьому виявляється основна перевага методу функції розподілу у фазовому просторі, якщо порівнювати його з описанням фотонних систем за допомогою оператора Манделя. Для останнього не існує замкнутого рівняння аналогічного рівнянню (4.47). Крім того, на відміну від оператора Манделя функція розподілу фотонів визначається лише обмеженим діапазоном фотонних мод, який може обиратись з врахуванням експериментальних методик чи спрямованості теоретичних досліджень.

Можна знайти не лише локальне значення густини фотонів (див. (4.30)), а й локальну густину енергії та імпульсу електромагнітного поля. З означення функції розподілу ці величини можна записати у вигляді:

$$\hat{\mathrm{E}}(\vec r,t)=\sum_{\vec q}\hbar\omega_q f(\vec r,\vec q,t),$$

$$\hat{\vec{\mathrm{P}}}(\vec r,t)=\sum_{\vec q}\hbar\vec q f(\vec r,\vec q,t). \qquad (4.52)$$

Якщо визначити симетризовану функцію розподілу

$$f_S(\vec r,\vec q,t)=\frac{1}{2V}\sum_{k<k_0}e^{-i\vec k\vec r}\left[a^+_{\vec q+\vec k/2}a_{\vec q-\vec k/2}+a_{\vec q-\vec k/2}a^+_{\vec q+\vec k/2}\right]$$

і підставити її замість $f(\vec r,\vec q,t)$ у перше рівняння (4.52), то локальна густина енергії дорівнює:

$$\hat{\mathrm{E}}(\vec r,t)=\sum_{\vec q}\hbar\omega_q\left[f(\vec r,\vec q,t)+\frac{1}{2V}\right]. \qquad (4.53)$$

Другим членом у квадратних дужках тут враховано внесок нульових коливань. Як і можна очікувати, після інтегрування (4.53) по $\vec r$ одержимо повну енергію поля (2.41).

У цьому розділі ми використовували назву "фотон" щодо об'єктів, які утворюються в результаті дії оператора $V^+(\vec r,\vec q)$ на вакуум. Кожен із них

а) описується хвильовою функцією $V^+(\vec r,\vec q)|0\rangle$, яка є точною власною функцією оператора кількості частинок з найменшим ненульовим власним значенням (тобто дорівнює одиниці); тому можна вважати, що ця функція задає стан лише однієї частинки;

б) з точністю до величин порядку k_0/q має імпульс $\hbar\vec q$;

в) з точністю до величин порядку $\left(k_0/q\right)^2$ має енергію $\hbar\omega_{\vec q}$;

г) рухається в конфігураційному просторі зі швидкістю $\vec c_{\vec q}$.

І хоча точного означення поняття "фотон" досі не існує (див. докладніше обговорення цієї проблеми у праці Клишка, УФН, (1994), а також працю Лемба (1995), в якій відображено його негативне ставлення до цього поняття), ми називаємо такий об'єкт фотоном, оскільки він, справді, є найменшою ("елементарною") порцією світлового поля. При цьому потрібно врахувати, що мова йде про усереднену по невеликому об'єму фазового простору фізичну характеристику. Отже, фактично, у цій главі ми описали еволюцію компактних хвильових пакетів, які в багатьох практично важливих задачах можна наближено вважати точковими об'єктами.

Наш розгляд пояснює перехід від опису оптичних явищ, що ґрунтується на хвильовій теорії, до опису, в якому базовими елементами є частинки (фотони). Можливість такого переходу узгоджується із сучасною (квантовою) трактовкою частинок як об'єктів, які обов'язково мають і хвильові властивості. Аналогічно, будь-які хвилі обов'язково виявляють властивості дискретних об'єктів, тобто частинок. Так, квантова механіка показала несуперечливий характер двох, здавалося б, зовсім різних поглядів на природу світла, поставивши остаточну крапку в полеміці, що тривала упродовж багатьох років ще з часів Гюйгенса та Ньютона.

Одержані в цьому розділі співвідношення справедливі лише за умови виконання певних критеріїв. Найголовніші з них:

1. Характерні довжини зміни інтенсивності оптичних полів мають бути значно більшими від довжин хвиль випромінювання;

2. Сили, що діють на фотони, мало змінюються на відстанях порядку довжин хвиль.

L. Mandel. *Configuration-Space Photon Number Operators in Quantum Optics.* – Phys. Rev., 1966. – **144**. – P. 1071.

O. Chumak, N. Sushkova. *Operator of Photon Density in the Phase Space*. – Ukr. J. Phys., 2012. – **64**. – P. 31.

A. A. Chumak, G. P. Berman. *Photon distribution function for long-distance propagation of partially coherent beams through the turbulent atmosphere.* – Phys. Rev., 2006. – **A 74**. 013805.

Д. Н. Клышко. *Квантовая оптика: квантовые, классические и метафизические аспекты.* – УФН, 1994. – **164**. – P. 1187.

W. E. Lamb Jr. *Anti-photon*. – Appl. Phys., 1995. – **B**, **60**. – P. 77.

O. Keller. *On the theory of spatial localization of photons.* – Phys. Rep., 2005. – **411**. – P. 1–232.

B. J. Smith and M. G. Raymer. *Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory.* – New Journ. of Phys., 2007. – **9**, 407. – P. 1–37.

Задачі

1. Показати, що кінетичне рівняння для класичної мікроскопічної функції розподілу $f(\vec{r},\vec{p},t)$ частинок, на які діє сила $\vec{F}(\vec{r})$, збігається з рівнянням (4.47). Тут функція розподілу N точкових частинок задається виразом

$$f(\vec{r},\vec{p},t)=\sum_{i=1}^{N}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_i(t)\right)\delta\left(\vec{p}-\vec{p}_i(t)\right),$$

де $\dfrac{\partial\vec{r}_i(t)}{\partial t}=\vec{\upsilon}_i(t)\equiv\dfrac{\vec{p}_i(t)}{m},\quad \dfrac{\partial\vec{p}_i(t)}{\partial t}=\vec{F}(\vec{r}_i)$.

2. Використовуючи кінетичне рівняння (4.47), вивести рівняння неперервності для фотонної густини. Знайти з нього вираз для густини потоку як функціоналу від фотонного розподілу у фазовому просторі, тобто від функції $f(\vec{r},\vec{q},t)$.

Вказівка.

Просумувати по $\vec{q}$ усі члени в рівнянні (4.47).

5. Світлоподільник. Однофотонні кореляції

5.1. Умови взаємності Стокса

Як і у випадку ефекту Казимира, вакуумні поля відіграють важливу роль під час проходження світла крізь світлоподільник (beam splitter). Далі проілюструємо, що у коректній (квантовій) теорії розщеплення світлового пучка на дві частини обов'язково треба враховувати вакуумну складову електромагнітного поля.

Розглянемо спочатку класичний випадок.

Коли хвиля з амплітудою υ_0 падає на непоглинаючу діелектричну пластину, як зображено на рис. 20, то частина її (υ_2) проходить далі, а інша (υ_3) – відбивається.

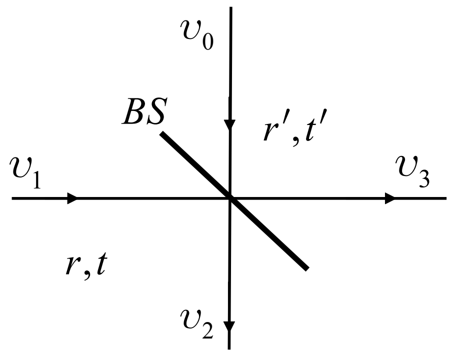

Рис. 20. Вхідні (υ_0, υ_1) та вихідні (υ_2, υ_3) моди світлоподільника *BS*

Подібне розщеплення спостерігається, коли одночасно з υ_0 на цю ж пластину падає хвиля υ_1 у напрямку υ_3. Отже,

можна записати очевидні лінійні співвідношення між усіма чотирма хвилями:

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 t' + \upsilon_1 r; \quad \upsilon_3 = \upsilon_0 r' + \upsilon_1 t , \tag{5.1}$$

де r, t – коефіцієнти відбиття та проходження хвилі під час падіння на пластину зліва, а r', t' – під час падіння справа. Різниця між коефіцієнтами r та r' , t та t' може виникнути у випадку асиметричної внутрішньої структури світлоподільника.

Коефіцієнти у співвідношеннях (5.1) не є незалежними величинами. Зокрема, відсутність поглинання під час проходження крізь пластину означає, що сумарна енергія на двох входах світлоподільника (0 та 1) дорівнює енергії, що проходить крізь два виходи (2 та 3). З цієї умови одержуємо співвідношення

$$|\upsilon_0|^2 + |\upsilon_1|^2 = |\upsilon_2|^2 + |\upsilon_3|^2 . \tag{5.2}$$

Підставляючи в праву частину (5.2) вирази (5.1), одержимо:

$$\begin{aligned} |\upsilon_0|^2 + |\upsilon_1|^2 &= |\upsilon_0|^2 \left(|r'|^2 + |t'|^2 \right) + |\upsilon_1|^2 \left(|r|^2 + |t|^2 \right) + \\ &+ \upsilon_1 \upsilon_0^* \left(r t'^* + r'^* t \right) + \upsilon_1^* \upsilon_0 \left(r^* t' + r' t^* \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Оскільки права частина (5.3) дорівнює лівій за довільних амплітуд хвиль, то між коефіцієнтами проходження та відбиття мають виконуватись такі співвідношення:

$$\begin{aligned} |r|^2 + |t|^2 = |r'|^2 + |t'|^2 = 1 \\ r t'^* + r'^* t = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

З першого співвідношення (5.4) можна одержати

$$|r|^2 - |r'|^2 = |t'|^2 - |t|^2 , \tag{5.5}$$

а з нижнього –

$$\left|r'\right|^2 = \left|r\right|^2 \left|\frac{t'}{t}\right|^2 . \qquad (5.6)$$

Тоді, підставляючи (5.6) в (5.5), одержимо:

$$\left|\frac{r}{t}\right|^2 \left(\left|t\right|^2 - \left|t'\right|^2\right) = \left|t'\right|^2 - \left|t\right|^2 . \qquad (5.7)$$

Оскільки вирази в лівій та правій частинах (5.7) мають різний знак, то рівність можлива лише у випадку:

$$\left|t\right|^2 = \left|t'\right|^2 . \qquad (5.8)$$

Враховуючи рівняння (5.6), маємо також:

$$\left|r\right|^2 = \left|r'\right|^2 . \qquad (5.9)$$

Далі нам буде потрібне ще одне співвідношення, яке з врахуванням рівностей (5.8) та (5.9) можна одержати з другого рівняння в (5.4). Для цього комплексні величини r, r', t, t' запишемо у вигляді:

$$r = \left|r\right| e^{i\varphi_r},\; r' = \left|r\right| e^{i\varphi_{r'}},\; t = \left|t\right| e^{i\varphi_t},\; t' = \left|t\right| e^{i\varphi_{t'}}, \qquad (5.10)$$

де φ_i – аргумент відповідного комплексного числа в (5.10). Тоді друге рівняння в (5.4) можна записати у такому вигляді:

$$|rt|\left(e^{i(\varphi_r - \varphi_{t'})} + e^{-i(\varphi_{r'} - \varphi_t)}\right) = 0 . \qquad (5.11)$$

Помноживши обидві частини (5.11) на $e^{i(\varphi_{t'} - \varphi_t)}$, одержимо:

$$rt^* + r'^* t' = 0 \cdot \qquad (5.12)$$

Рівняння (5.4), (5.8), (5.9) та (5.12) є так званими умовами взаємності Стокса (Stokes, 1849), які використаємо далі.

У випадку симетричного подільника ($r = r', t = t'$) з рівняння (5.11) знаходимо

$$e^{i(\varphi_r - \varphi_t)} + e^{-i(\varphi_r - \varphi_t)} = 0 ,$$

звідки випливає, що

$$\varphi_r - \varphi_t = \pm\frac{\pi}{2} \cdot \qquad (5.13)$$

Співвідношення (5.13) відображає відоме в оптиці правило, за якого під час падіння світла на одношаровий діелектрик фази відбитої моди та моди, що пройшла, відрізняються на $\pm(\pi/2)$. Як видно з попереднього розгляду, співвідношення (5.13) є лише наслідком закону збереження енергії під час проходження світла крізь непоглинаючий діелектрик.

5.2. Квантовий опис проходження світла крізь світлоподільник

Перехід до квантового опису здійснюється шляхом заміни класичних амплітуд υ_i, υ_i^* на оператори a_i, a_i^+. Тоді для хвиль, що пройшли, запишемо співвідношення аналогічні (5.1):

$$a_2 = a_0 t' + a_1 r; \quad a_3 = a_0 r' + a_1 t . \qquad (5.14)$$

Враховуючи, що оператори a_0 та a_1 описують незалежні моди і тому $\left[a_0, a_1^+\right] = 0$, $\left[a_0, a_0^+\right] = \left[a_1, a_1^+\right] = 1$, знайдемо аналогічні комутатори для мод 2 та 3:

$$\left[a_2, a_2^+\right] = \left|t'\right|^2 + \left|r\right|^2 = 1; \quad \left[a_3, a_3^+\right] = \left|t\right|^2 + \left|r'\right|^2 = 1, \qquad (5.15)$$

де використано співвідношення Стокса (5.4), (5.8) та (5.9).

Перехресні ж комутатори дорівнюють нулеві

$$\left[a_2, a_3^+\right] = rt^* + r'^* t' = 0;\ \left[a_3, a_2^+\right] = \\ = r't'^* + r^* t = 0;\ \left[a_2, a_3\right] = \left[a_2^+, a_3^+\right] = 0, \qquad (5.16)$$

(див. (5.12)), як і має бути у випадку незалежних мод 2 і 3. Легко побачити, що комутаційні співвідношення для вихідних мод можна задовольнити лише тоді, якщо на обох вхідних каналах присутні поля (a_0 та a_1). Якщо зовнішній сигнал подається лише на вхід 1, то a_0 буде амплітудою лише вакуумного поля.

Виразимо оператори кількості фотонів на обох виходах $\hat{n}_{2,3}$ через амплітуди вхідних сигналів. Враховуючи рівняння (5.8) і (5.9), одержимо:

$$\hat{n}_2 = a_2^+ a_2 = |t|^2 \hat{n}_0 + |r|^2 \hat{n}_1 + t'^* r a_0^+ a_1 + r^* t' a_1^+ a_0,$$

$$\hat{n}_3 = a_3^+ a_3 = |t|^2 \hat{n}_1 + |r|^2 \hat{n}_0 + t^* r' a_1^+ a_0 + r'^* t a_0^+ a_1. \qquad (5.17)$$

Звідси, використовуючи рівняння (5.4), легко одержимо співвідношення:

$$\hat{n}_2 + \hat{n}_3 = \hat{n}_0 + \hat{n}_1, \qquad (5.18)$$

яке збігається з класичним рівняння (5.2) і означає, що сумарна кількість фотонів зберігається під час проходження світлоподільника.

Якщо a_0 – вакуумне поле, то середні значення $\langle n_0 \rangle, \langle a_0^+ a_1 \rangle, \langle a_1^+ a_0 \rangle$ дорівнюють нулеві. Тоді з рівняння (5.17) одержимо:

$$\langle n_2 \rangle = |r|^2 \langle n_1 \rangle,$$

$$\langle n_3 \rangle = |t|^2 \langle n_1 \rangle. \qquad (5.19)$$

Як бачимо, вакуумне поле не впливає на середні значення інтенсивностей вихідного випромінювання (аналогічно класичному випадку). Вирази (5.19) не змінилися б, якби ми опустили в співвідношеннях (5.14) складові, що враховують унесок вакуумного поля в a_2 та a_3. Проте під час розрахунку кореляцій інтенсивностей ситуація істотно змінюється.

5.3. Однофотонні кореляції

Щоб показати потребу врахування вакуумного поля, розглянемо найпростіший випадок, коли на вхід 1 надходить один фотон, а на вході 0 є лише вакуумне поле.

Знайдемо кореляційну функцію інтенсивностей на двох виходах (P_{23}):

$$P_{23} = \langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle = \langle 1_1 0_0 | \left(|t|^2 \hat{n}_0 + |r|^2 \hat{n}_1 + t'^* r a_0^+ a_1 + r^* t' a_1^+ a_0 \right) \times \\ \times \left(|t|^2 \hat{n}_1 + |r|^2 \hat{n}_0 + t^* r' a_1^+ a_0 + r'^* t a_0^+ a_1 \right) | 0_0 1_1 \rangle. \qquad (5.20)$$

Тут ми позначили $|0_0 1_1\rangle$ хвильову функцію стану, в якому один фотон присутній у моді 1 і немає фотонів у моді 0. Нижнім індексом, як і раніше, позначаємо номер моди. Враховуючи, що $a_0 |0_0 1_1\rangle = 0, \langle 1_1 0_0 | a_0^+ = 0$, а також друге співвідношення Стокса (5.4), легко одержуємо для P_{23}:

$$P_{23} = |rt|^2 \langle 1_1 0_0 | \left(\hat{n}_1^2 - a_1^+ a_0 a_0^+ a_1 \right) | 0_0 1_1 \rangle. \qquad (5.21)$$

Оскільки в стані $|0_0 1_1\rangle$ середні значення величин, що входять до правої частини (5.21), дорівнюють

$$\langle \hat{n}_1^2 \rangle = 1,\ \langle a_1^+ a_0 a_0^+ a_1 \rangle = \langle a_1^+ a_1 \rangle \langle 1 + a_0^+ a_0 \rangle = 1,$$

то $P_{23} = 0$.

З погляду квантової механіки цей результат очевидний, оскільки під час вимірювання ми можемо знайти один фотон або на виході 2, або на виході 3. Це не що інше, як вияв дискретності оптичного поля. Один фотон не корелює сам із собою, якщо мова йде про кореляцію інтенсивностей. Цей висновок ніскільки не суперечить відомій сентенції, що фотони інтерферують лише самі з собою, оскільки в останньому випадку йдеться лише про кореляцію амплітуд полів, а не їхніх інтенсивностей.

У випадку класичного опису другий член у круглих дужках (5.21) має дорівнювати нулеві ($\upsilon_0 = 0$), тоді одержуємо:

$$P_{23} = |rt|^2 |\upsilon_1|^2 \neq 0 . \tag{5.22}$$

Порівняння результатів для P_{23} за класичного та квантового підходів дає змогу зрозуміти принципову важливість врахування вакуумних полів у процесах, що відбуваються за участі невеликої кількості фотонів.

Далі розглянемо випадок, про який йшлося у розділі 1.

Нехай у модах 0 та 1 є лише по одному фотону. Тоді замість (5.20) матимемо вираз:

$$P_{23} = \langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle = \langle 1_1 1_0 | \left(|t|^2 \hat{n}_0 + |r|^2 \hat{n}_1 + t'^* r a_0^+ a_1 + r^* t' a_1^+ a_0 \right) \times$$

$$\times \left(|t|^2 \hat{n}_1 + |r|^2 \hat{n}_0 + t^* r' a_1^+ a_0 + r'^* t a_0^+ a_1 \right) | 1_0 1_1 \rangle = 1 - 4|rt|^2, \tag{5.23}$$

де ми знову використали співвідношення Стокса.

Легко побачити, що якщо $|r|^2 = |t|^2 = \dfrac{1}{2}$, то одержимо $P_{23} = 0$, тобто результат, про який йшлося у Вступі. Наявна очевидна аналогія між зменшенням кореляційної функції (5.23) (порівняно з добутком середніх $< \hat{n}_2 >< \hat{n}_3 >$, яке дорівнює 1) та звичайною інтерференцією, тобто інтерференцією двох полів. Проте остання описується парною кореляційною функцією полів на відміну від нашого випадку – інтерференції фотонів. Остання ж, тобто інтерференція інтенсивностей, описується кореляційною функцією четвертого порядку по амплітудах полів (див. (5.23)).

У випадку $P_{23} = 0$ можна казати про повну деструктивну інтерференцію. Її спостерігають, коли фотони разом “прибувають” або на вихід 2, або на вихід 3. Звичайно, описаний вище інтерференційний ефект може спостерігатись не завжди. Якщо мова йде лише про два фотони, то це, очевидно, мають бути світлові імпульси і тоді можна казати про інтерференцію інтенсивностей лише у тому випадку, якщо імпульси одночасно надходять до детекторів. У протилежному випадку, якщо імпульси розділені часовим проміжком більшим, ніж їхня тривалість, ніякої кореляції (інтерференції) інтенсивностей не буде спостерігатись. Саме цю обставину можна використати для високоточних вимірювань довжин чи часових проміжків.

5.4. Вимірювання часових проміжків між двома фотонами інтерференційним методом

Ідею практичного використання щойно описаного ефекта деструктивної чотирихвильової інтерференції реалізував експериментально Хонг та інш. Були виміряні часові проміжки між фотонами, які у мільйони разів коротші, ніж роздільна здатність детекторів та електронних пристроїв, використаних в експерименті.

На рис. 21 зображено спрощену схему вимірювання, основним елементом якої є інтерферометр Маха–Цендера. Інтерферометр містить два дзеркала $M_{1,2}$ та світлоподільник BS , за допомогою яких змішується випромінювання, що виходить з нелінійного середовища.

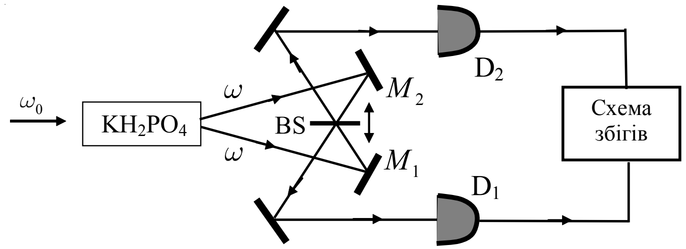

Рис. 21. Схема експерименту з двофотонної інтерференції, що дає змогу визначити відстань між однофотонними імпульсами. Два фотони з частотою ω виходять з кристала в різних напрямках і після відбиття від дзеркал M_1 та M_2 змішуються на світлоподільнику BS (50 % : 50 %). Відсутність сигналу на схемі збігів свідчить про деструктивну інтерференцію, що описана в попередньому параграфі

Світло з частотою ω утворюється в об'ємі кристалу дигідрофосфату калію (KH_2PO_4) під час опромінення його зовнішнім джерелом з частотою ω_0. Внаслідок нелінійних процесів фотони з частотою ω_0 породжують пари фотонів з удвічі меншою частотою: $\omega_0 = 2\omega$. Такий процес називають параметричною вниз-конверсією (parametric downconversion). Якщо розглядати пару фотонів, народжену в одному елементарному акті, як два ідентичні хвильові пакети (за винятком того, що вони поширюються в різних напрямках), то очевидно, що якщо якийсь пакет хоча б частково затримується відносно іншого, то повна деструктивна інтерференція стає неможливою. Вона повністю зникає, коли час затримки більший, ніж тривалість імпульсу.

У випадку симетричної схеми (рис. 21), як можна побачити з аналізу в попередньому параграфі, ніякого сигналу на схемі збігів не буде. Якщо ж порушити симетрію, переміщуючи, наприклад, подільник у вертикальному напрямку, то фотони незалежно попадають на детектори D_1 та D_2, тоді на схемі збігів з'явиться відмінний від нуля сигнал. Знаючи, на яку відстань був переміщений світлоподільник, можна легко розрахувати наскільки змінилася відстань між імпульсами та час затримки. У згаданій вище праці Хорна повідомляється, що йому вдалося досягти роздільної здатності порядку кількох фемтосекунд. У пізніших експериментах вдалось виміряти затримки між імпульсами, що були менші навіть від періоду коливань світлових хвиль.

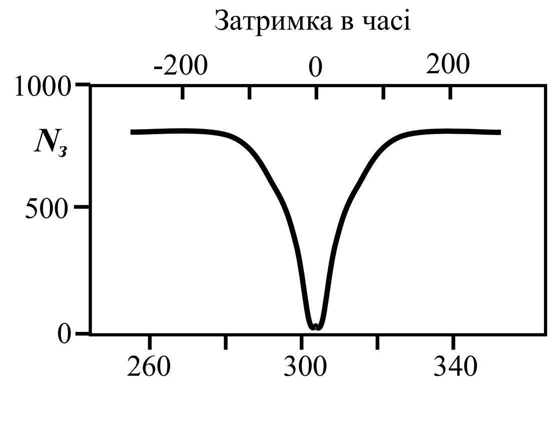

Рис. 22. Кількість збігів як функція зміщення (у мікронах) світлоподільника або затримки імпульсів (у фемтосекундах)

На рис. 22 зображено кількість збігів $N_з$ упродовж 10 хв в експерименті Хорна.

5.5. Квантова теорія інтерферометра Майкельсона

Світлоподільник є важливим елементом багатьох оптичних систем. Одним з найчутливіших пристроїв, який широко використовують в оптичних дослідженнях, є інтерферометр Майкельсона (Michelson interferometer). Простота та надзвичайно висока чутливість до переміщення окремих його елементів стали причиною того, що нині з інтерферометром Майкельсона пов'язують перспективи реєстрації гравітаційних хвиль.

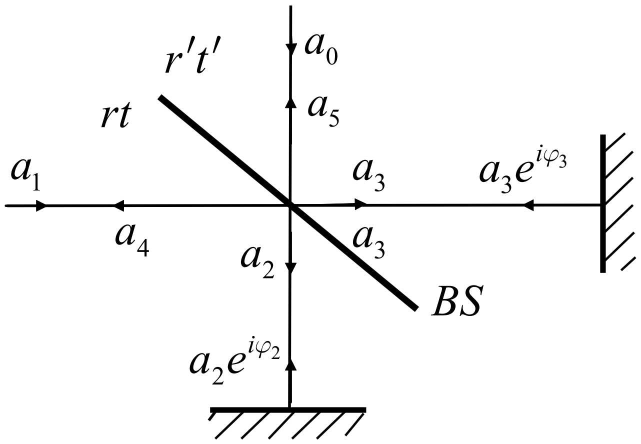

Рис. 23. Схема поширення світлових хвиль в інтерферометрі Майкельсона

На рис. 23 зображено принципову схему інтерферометра. Основними елементами є світлоподільник та два дзеркала (внизу та праворуч). Ззовні на інтерферометр можуть незалежно надходити сигнали a_0 та a_1. Після проходження світлоподільника утворюються два нових пучки a_2 та a_3,

які після відбиття від дзеркал, знову повертаються на світлоподільник. Після другого проходження світлоподільника утворюються вихідні пучки a_4 та a_5. Очевидно, що амплітуди вихідних пучків залежать від фаз φ_2 та φ_3, які, в свою чергу, лінійно залежать від відстаней між дзеркалами та світлоподільником. Як видно з рисунка, амплітуди a_4 та a_5 можна виразити через a_2 та a_3:

$$a_4 = a_2 e^{i\varphi_2} r + a_3 e^{i\varphi_3} t'; \quad a_5 = a_2 e^{i\varphi_2} t + a_3 e^{i\varphi_3} r'. \qquad (5.24)$$

Легко пересвідчитись, що оскільки a_2 і a_3 є незалежні моди (див. (5.15) та (5.16)), то a_4 та a_5 також є незалежними модами:

$$\left[a_4, a_5^+\right] = 0, \left[a_4, a_4^+\right] = \left[a_5, a_5^+\right] = 1.$$

Амплітуди a_2 та a_3 виражаються через амплітуди вхідних полів:

$$a_2 = a_0 t' + a_1 r; \quad a_3 = a_0 r' + a_1 t. \qquad (5.25)$$

Тоді

$$\begin{aligned} a_4 &= a_0 t'\left(r e^{i\varphi_2} + r' e^{i\varphi_3}\right) + a_1\left(r^2 e^{i\varphi_2} + t t' e^{i\varphi_3}\right) \\ a_5 &= a_0\left(t t' e^{i\varphi_2} + r'^2 e^{i\varphi_3}\right) + a_1 t\left(r e^{i\varphi_2} + r' e^{i\varphi_3}\right). \end{aligned} \qquad (5.26)$$

Коли відомі амплітуди a_4 та a_5 як функції вхідних полів, то можна знайти середню кількість фотонів у вихідних модах. Зокрема, коли на вході 0 є тільки вакуумне поле, то

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_5 \rangle &= \langle \hat{n}_1 \rangle \left| t\left(r e^{i\varphi_2} + r' e^{i\varphi_3}\right)\right|^2 = \\ &= \langle \hat{n}_1 \rangle |rt|^2 \left| e^{i(\varphi_2 + \varphi_r)} + e^{i(\varphi_3 + \varphi_{r'})}\right|^2, \end{aligned} \qquad (5.27)$$

де ми виразили комплексні величини через їхні абсолютні значення та відповідні аргументи, як пояснено у (5.10). Після простих тригонометричних перетворень легко одержуємо:

$$\langle\hat{n}_5\rangle = \langle\hat{n}_1\rangle 4|rt|^2\cos^2(\varphi/2), \qquad (5.28)$$

де $\varphi = \varphi_r - \varphi_{r'} + \varphi_2 - \varphi_3$.

Значення $\langle\hat{n}_4\rangle$ знайдемо з умови балансу енергії:

$$\langle\hat{n}_4\rangle + \langle\hat{n}_5\rangle = \langle\hat{n}_1\rangle. \qquad (5.29)$$

Отже,

$$\langle\hat{n}_4\rangle = \langle\hat{n}_1\rangle\left[1 - 4|rt|^2\cos^2(\varphi/2)\right]. \qquad (5.30)$$

Обидві величини $\langle\hat{n}_4\rangle$ та $\langle\hat{n}_5\rangle$ залежать від кута φ, а отже, і від $\varphi_2 - \varphi_3$. Якщо хоча б одне дзеркало зміщується (наприклад, на відстань $\Delta l = 0,05\lambda$), то $\varphi_2 - \varphi_3$ змінюється на величину $\frac{4\pi}{\lambda}\Delta l = 4\pi\cdot 0,05 \approx 0,63$, що легко завважити, вимірюючи $\langle\hat{n}_4\rangle$ чи $\langle\hat{n}_5\rangle$.

Квантова версія інтерферометра Майкельсона дає змогу прямими вимірюваннями вивчати статистичні характеристики падаючого випромінювання.

Пояснимо це твердження на простому прикладі. Нехай знову на вході 0 є лише вакуумне поле, а детектори виміряють кореляційну функцію флуктуацій вихідних сигналів $\langle\delta\hat{n}_5\delta\hat{n}_4\rangle$, де $\delta\hat{n}_i = \hat{n}_i - \overline{n}_i$.

Вона дорівнює:

$$\langle\delta\hat{n}_5\delta\hat{n}_4\rangle = \langle\hat{n}_5\hat{n}_4\rangle - \overline{n}_5\overline{n}_4 = \langle a_5^+ a_4^+ a_5 a_4\rangle - \overline{n}_5\overline{n}_4, \qquad (5.31)$$

де ми переставили місцями одну пару операторів a_5 та a_4^+, оскільки, як зазначалось вище, вони комутують.

Використовуючи рівняння (5.26), перепишемо (5.31) у вигляді:

$$|t|^2\left|re^{i\varphi_2} + r'e^{i\varphi_3}\right|^2\left|r^2e^{i\varphi_2} + tt'e^{i\varphi_3}\right|^2\left\langle a_1^+a_1^+a_1a_1 - \overline{n}_1^2\right\rangle.$$

У випадку симетричного 50 % : 50 % світлоподільника останній вираз спрощується і дорівнює:

$$\begin{aligned}\langle\delta\hat{n}_5\delta\hat{n}_4\rangle &= \frac{1}{16}\left|e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_3}\right|^2\left|e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_3}\right|^2\left\langle\delta\hat{n}_1^2 - \hat{n}_1\right\rangle = \\ &= \frac{1}{4}\left\langle\delta\hat{n}_1^2 - \hat{n}_1\right\rangle\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)\end{aligned},$$

де знак (–) перед $e^{i\varphi_3}$ з'явився внаслідок врахування правила (5.13).

Отже,

$$\langle\delta n_5\delta n_4\rangle = \frac{1}{4}\left(\left\langle\delta\hat{n}_1^2\right\rangle - \langle\hat{n}_1\rangle\right)\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3). \qquad (5.32)$$

Як бачимо, знак кореляційної функції (5.32) залежить від статистики вхідного випромінювання. Нагадаємо, що якщо знак позитивний, то статистика є суперпуассонівською. Якщо негативний, то це випадок субпуассонівської статистики.

5.6. Проходження світла крізь поляризатор

Під час опису світлоподільника ми розглядали проходження крізь нього окремих мод, тобто мод із заданими значеннями хвильового вектора $\vec{k}$ та поляризації s. Коли світло проходить крізь пристрій, який по-різному пропускає хвилі з різною поляризацією, то зручно розглядати одразу дві компоненти поля, що відповідають одному й тому ж $\vec{k}$ ($\vec{k}\parallel z$).

Отже, запишемо поле, що попадає на поляризатор, у вигляді:

$$\vec{A} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y, \qquad (5.33)$$

де $a_{x,y}$ – оператори знищення фотонів з хвильовим вектором $\vec{k}$ та поляризаціями $\vec{e}_{x,y}$.

Під час проходження крізь поляризатор поле $\vec{A}$ змінюється. У найпростішому випадку (лінійний поляризатор) залишається лише одна його компонента вздовж якоїсь осі, орієнтованою під кутом θ до осі x (рис. 24).

Введемо нову (штриховану) систему координат.

Із рис. 24 видно, що

$$\vec{e}_x = \vec{e}'_x \cos\theta - \vec{e}'_y \sin\theta,$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}'_y \cos\theta + \vec{e}'_x \sin\theta. \tag{5.34}$$

Підставляючи (5.34) в (5.33), одержимо:

$$\vec{A} = \vec{e}'_x\left(a_x \cos\theta + a_y \sin\theta\right) + \\ + \vec{e}'_y\left(a_y \cos\theta - a_x \sin\theta\right) \equiv a_{x'}\vec{e}'_x + a_{y'}\vec{e}'_y, \tag{5.35}$$

де оператори $a_{x',y'}$ визначаються виразами в круглих дужках.

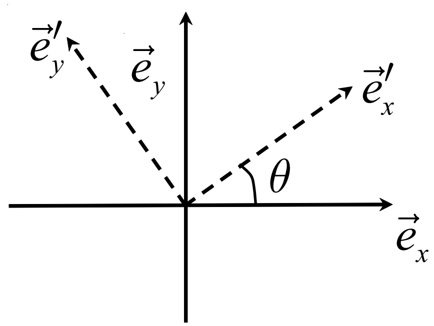

Рис. 24. Через поляризатор проходить лише та компонента поля, що орієнтована вздовж $\vec{e}'_x$

Як уже ми зазначали, після проходження поляризатора залишиться лише компонента поля вздовж $\vec{e}'_x$ ($\vec{A}'$):

$$\vec{A}' = \vec{e}'_x(a_x \cos\theta + a_y \sin\theta) \equiv a_{x'}\vec{e}'_x. \tag{5.36}$$

Легко побачити, що оператори, задані у базисі, “повернутому” на кут θ, задовольняють такі ж комутаційні співвідношення, що й в початковому базисі $\vec{e}_{x,y}$:

$$\left[a_{x',y'}, a^+_{x',y'}\right] = 1, \quad \left[a_{x'}, a^+_{y'}\right] = \left[a_{y'}, a^+_{x'}\right] = 0. \tag{5.37}$$

Оператор кількості фотонів у моді, що пройшла крізь світлоподільник, дорівнює:

$$\hat{n}' = a^+_{x'}a_{x'} = (a^+_x \cos\theta + a^+_y \sin\theta)(a_x \cos\theta + a_y \sin\theta) =$$

$$= \hat{n}_x \cos^2\theta + \hat{n}_y \sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\left(a^+_x a_y + a^+_y a_x\right). \tag{5.38}$$

Явний вигляд оператора $\hat{n}'$ використаємо в наступному розділі.

Як бачимо з (5.38), світло обох мод може проходити крізь поляризатор, але ймовірності проходження є різними і залежать від кута θ. Якщо кількість падаючих фотонів велика, то, використовуючи лише частину сигналу, можна визначити поляризацію падаючого випромінювання. Якщо ж надходить лише один фотон, то він може пройти крізь поляризатор і тоді, коли він знаходиться у моді a_x, і тоді, якщо у моді a_y. Дізнатись про те, яка була його початкова поляризація неможливо. Справді, фотон пройшов би крізь поляризатор із ймовірністю, що дорівнює одиниці, коли б був поляризований уздовж осі x'. Якби ж спостерігалось значне відхилення поляризації від напрямку x', то фотон також міг пройти, але з ймовірністю, яка значно менша від одиниці. Одним вимірюванням неможливо розрізнити ці дві ситуації, що й стало принциповим підґрунтям для створення квантової криптографії.

Більшість квантових криптографічних протоколів використовує технологію передачі секретних ключів за допомогою окремих фотонів: кожен фотон є носієм одного інформаційного біта. Одиниця інформації задається напрямком поляризації. Генератор фотонів може змінювати випадковим чином напрямок поляризації. Якщо припустити, що фотон був перехоплений третьою стороною, яка, виявивши його, здатна "виготовити" і передати далі фотон з такою ж частотою, то визначити точно або з високою точністю його поляризацію, не маючи інформації про орієнтацію передаючого пристрою, неможливо. Саме ця обставина принципово відрізняє квантовий випадок від класичного, коли у створенні кожної одиниці інформації бере участь велика кількість фотонів. "Клонування" одиночних фотонів неможливе. Це означає неможливість "підслуховування" передачі інформації. Отже, секретність забезпечується квантовим характером одиниць інформації, якими в описаному нами випадку є однофотонні імпульси електромагнітного поля.

У наступному розділі продовжимо розгляд однофотонних кореляцій та опишемо докладніше конкретний протокол передачі квантового криптографічного ключа.

L. Mandel. *Quantum effects in one-photon and two-photon interference.* – Review of Modern Physics, 1999. – **71**. – S. 274–282.

C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference.* – Phys. Rev. Lett., 1987. – **59**. – C. 2044.

Задачі

1. На вхід 1 (рис. 20) надходить світло у стані $|1_1\rangle$ (один фотон у моді 1). На вхід 0 падає світло у когерентному стані $|z\rangle$.

Знайти кореляційну функцію флуктуацій кількості фотонів на виходах 2 та 3: $\langle \delta\hat{n}_2 \delta\hat{n}_3 \rangle$. Для простоти розглянути випадок симетричного світлоподільника.

Пояснення.

Під час розв'язку треба врахувати, що когерентний стан є власним станом відповідного оператора знищення.

У нашому випадку

$$a_0|z\rangle = z|z\rangle,$$

де z – довільне комплексне число.

2. У падаючому на поляризатор випромінюванні є лише один фотон, що знаходиться в моді, поляризованій уздовж осі x. Орієнтація поляризатора така сама, як і на рис. 24.

Знайти середню кількість $\langle \hat{n}' \rangle$ та середньоквадратичну флуктуацію $\left\langle (\delta\hat{n}')^2 \right\rangle$ кількості пройдених крізь поляризатор фотонів як функцію кута θ. Порівняти з випадком рівноважного класичного випромінювання в моді з поляризацією вздовж напрямку x.

Примітка.

Потрібно також врахувати наявність вакуумного поля, орієнтованого в напрямку y.

6. Квантові кореляції і нерівності Белла. Квантова криптографія

"Якщо квантова теорія все ще вас не шокувала,
то ви її все ще не розумієте."
Нільс Бор

У попередньому розділі ми переконалися, що електромагнітне поле двох незалежних мод ($|0\rangle$ та $|1\rangle$) після проходження світлоподільника переходить у стан, в якому ці моди "переплутуються". Найвиразніший випадок переплутування спостерігався для світлоподільника 50 % : 50 %, коли на входах 0 та 1 було лише по одному фотону. Було показано, що під час кожної конкретної реалізації експерименту фотони парами проходили або через вихід 2, або ж через вихід 3 (див. (5.23) для випадку $|r|^2 = |t|^2 = 1/2$). Сучасна квантова теорія не дає відповіді на те, який саме шлях "оберуть" фотони в окремому експерименті. Невідомо, яким має бути початковий стан системи для забезпечення в одиночному експерименті проходження пари фотонів до наперед визначеного детектора.

З погляду класичної фізики така ситуація може означати або відсутність детермінізму в фізичних явищах (тобто відсутність причинно-наслідкових зв'язків у природних процесах), або ж неповноту квантової теорії. Проблему фізичної інтерпретації результатів квантової теорії обговорюють упродовж багатьох десятиліть. Дискусія значно загострилася після появи 1935 р. публікації Ейнштейна, Подольського та Розена (ЕПР), в якій наводилось визначення поняття "фізичної реальності". Автори фактично поставили під сумнів квантову теорію.

До середини XX століття аргументи ЕПР виглядали досить переконливими. Згодом, особливо після того, як Дж. С. Белл сформулював певні нерівності (1964), які мають виконуватись у випадку "детерміністичного" (класичного) перебігу фізичних явищ, для більшості дослідників стало очевидним, що квантовий опис носить фундаментальний характер. Інакше кажучи, відсутність зрозумілої для інтуїтивного сприйняття детерміністичної картини не може означати наближений (неповний) опис реальності методами квантової механіки. Така зміна поглядів відбулась через те, що нерівності Белла були перевірені експериментально і висновок був зроблений саме на користь квантової теорії.

Нині дискусії щодо розуміння багатьох аспектів квантової теорії продовжуються. Вони стимулюють проведення нових теоретичних та експериментальних досліджень. Продовжуються пошуки шляхів узгодження нашого інтуїтивного розуміння суті фізичних явищ з результатами досліджень. Проте, попри об'єктивні труднощі розуміння (на рівні інтуїції) квантового світу, багато квантових явищ уже стали основою нових технологій, тобто знайшли практичне застосування. Як приклад, в останньому параграфі цього розділу розглянемо практичну реалізацію поширення криптографічних ключів з використанням переплутаних станів фотонів. Захищеність відповідної лінії зв'язку від підслуховування забезпечується квантовою природою світла. Якщо казати конкретніше, то основна ідея такої технології ґрунтується на неможливості встановити напрямок поляризації одного фотона під час його детектування (див. попередній розділ). Це означає теоретичну можливість створення комунікаційних систем абсолютно захищених від спроб несанкціонованого доступу до інформації (тобто підслуховування) в процесі її поширення між учасниками зв'язку.

6.1. Переплутані стани і парадокс Ейнштейна, Подольського, Розена

Переплутані стани (entangled states) вперше були використані в роботі ЕПР для аналізу уявних експериментів, щоб з'ясувати фізичну суть квантових процесів. Як зазначено на початку розділу, фактично, ми вже мали справу з двочастинковими переплутаними станами. Зокрема у випадку повної деструктивної інтерференції, описаної в розділі 5, хвильова функція вихідного випромінювання має вигляд:

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|2_A, 0_B\right\rangle + e^{i\varphi}\left|0_A, 2_B\right\rangle\right), \qquad (6.1)$$

де фаза φ може бути довільним дійсним числом; нумерацію виходів 2, 3 тут ми замінили на звичніші в літературі позначення A, B. Легко перевірити, що саме за такої (нефакторизованої) структури хвильової функції на схемі збігів буде відсутній сигнал:

$$P_{AB} = \left\langle\psi\right|\hat{n}_A\hat{n}_B\left|\psi\right\rangle = 0. \qquad (6.2)$$

Зазначимо, що на вході електромагнітне поле було в стані $\left|\psi_{in}\right\rangle = \left|1_0\right\rangle\left|1_1\right\rangle$, тобто задавалось факторизованою хвильовою функцією. Як видно з (6.1), два фотони перебувають у стані, який не має аналогів у класичній фізиці (тобто в "некласичному" стані), оскільки одна і та ж пара частинок нібито одночасно знаходиться в просторово розділених ділянках A і B.

Якщо в процесі вимірювання з'ясувалось, що на виході A є два фотони, то автоматично випливає, що на виході B поле буде у вакуумному стані $\left|0_B\right\rangle$. І навпаки, коли на виході A частинки відсутні, поле на виході B буде у стані $\left|2_B\right\rangle$. Відтак, ми можемо точно визначити стан поля на виході B, не здійснюючи ніяких вимірювань саме на цьому виході.

Зрозуміти хід міркувань ЕПР можна на такому простому прикладі. Нехай існує переплутаний двочастинковий стан, хвильову функцію якого можна взяти у дещо загальнішому, ніж (6.1) вигляді, а саме:

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\phi_A\right\rangle\left|\chi_B\right\rangle - \left|\phi_B\right\rangle\left|\chi_A\right\rangle\right), \qquad (6.3)$$

де $\left|\phi\right\rangle, \left|\chi\right\rangle$ – власні функції оператора якоїсь фізичної величини.

Вважатимемо, що після утворення стану $\left|\psi\right\rangle$ дві частинки розлітаються в різні напрямки A, B. Це можуть бути два протони, утворені в процесі розщеплення молекули ортоводню електричним полем.

Випадок синглетного двофотонного стану докладніше розглянемо в наступних параграфах. Якщо в процесі вимірювання з'ясувалось, що підсистема на виході A (частинка A) знаходилась у стані $\left|\phi\right\rangle$, то, як і у випадку функції (6.1), підсистема на виході B опиниться у стані $\left|\chi\right\rangle$. Оскільки в процесі вимірювання ніякого зовнішнього впливу на частинку B не здійснювалось (частинки могли знаходитись як завгодно далеко одна від одної), то логічно припустити, що стан $\left|\chi_B\right\rangle$ існував і раніше (з моменту утворення функції $\left|\psi\right\rangle$), тобто до проведення вимірювання. Тоді частинки перебували близько одна до одної і між ними могла існувати сильна кореляція, яка б і визначила однозначно стани A та B. Таку гіпотетичну взаємну кореляцію у літературі називають концепцією локальності Ейнштейна, хоча в самій статті ЕПР термін “локальність” відсутній. Концепція локальності виглядає досить правдоподібною, проте прямі експерименти довели її помилковість. Про це йтиме мова в наступному параграфі.

За ЕПР, якщо з повною достовірністю можна знайти значення якоїсь фізичної величини, не піддаючи її ніякому збуренню, то це означає, “що існує елемент фізичної реальності, що відповідає цій величині”. На простішій мові про це можна сказати як про змогу дізнатись про значення якоїсь фізичної величини, не проводячи її вимірювання. Продовжуючи міркування, можна припустити, що спочатку ми могли вимірювати якусь іншу фізичну величину, що характеризує частинку A. Нехай відповідний оператор не комутує з попереднім. Наприклад, якщо у першому випадку це була z -а компонента спіну частинки, то у другому – x -а компонента спіну. Тоді за аналогією з першим випадком ми могли б визначити власне значення x-ї компоненти спіну частинки B, оскільки знову ніякого впливу на неї в процесі вимірювання не було. Відтак, одночасно мали б існувати точні значення двох фізичних величин, що відповідають власним значенням некомутуючих операторів (z-ої та x-ої компонент оператора спіну). Замість різних проекцій спінів це могли б бути оператори координати та імпульсу, як це розглядалось у праці ЕПР.

Оскільки такий висновок суперечить основним положенням квантової теорії, що заперечує можливість точного визначення двох некомутуючих величин у системі з незмінним станом, то автори ЕПР зробили висновок щодо внутрішньої суперечливості квантової теорії, а саме: опис фізичної реальності за допомогою лише хвильової функції є неповним. Інакше кажучи, це має означати неповноту квантової теорії.

Проте сучасні уявлення про суть квантової теорії дещо інші. Її побудовано для пояснення не уявних, а реальних експериментів. Динамічні змінні (координати, імпульси, спінові змінні тощо) на відміну від класичної механіки є не фізичними величинами, а лише їхніми операторами. Фізичні величини з’являються лише в результаті вимірювання. У цьому контексті можна стверджувати, що лише вимірювання породжують фізичну реальність, і лише завдяки вимірюванням з’являється реальна інформація про стан системи. Щоб уникнути сприйняття результатів експерименту як недетермінованих, завжди потрібно брати до уваги ту обставину, що в процесі вимірювання система взаємодіє із зовнішнім пристроєм, а також з вакуумом. Тому стан системи змінюється в процесі вимірювання. Зокрема вплив вакуумного поля на результати деяких експериментів було продемонстровано в попередніх розділах. У фізичній картині, яку аналізували автори ЕПР, згадані чинники не брались до уваги.

Стосовно інтерпретації описаного вище уявного експерименту можна стверджувати таке. Однозначного стану частинки B не існує до моменту вимірювання частинки A. Існує лише двочастинковий переплутаний стан (6.3). У результаті вимірювання відбувається редукція хвильової функції:

$$\psi \rightarrow \phi_A \chi_B \text{ або ж } \psi \rightarrow \phi_B \chi_A .$$

Повторне вимірювання частинки A у двочастинковому переплутаному стані вже неможливе, оскільки останній був зруйнований у процесі вимірювання. Кожне наступне вимірювання дасть попередній результат за умови, що стан (орієнтація) вимірювального пристрою незмінний, а вплив процесу вимірювання на вже відомий стан частинки незначний (неруйнівне вимірювання).

Підсумовуючи, зазначимо, що за сучасними уявленнями фізичні величини не є абстрактними поняттями. Вони завжди пов'язані з процесами вимірювань. Саме цей аспект квантового світу не враховували автори ЕПР.

6.2. Ідея "прихованих" параметрів

Ті міркування, що вимірювання стану частинки A дають змогу дізнатися про стан частинки B, стимулювали появу гіпотези локальності Ейнштейна, про яку йшлося вище. Якби виявлені значно пізніше від моменту утворення одночастинкові стани існували від самого початку, то таку ситуацію, очевидно, можна було б описувати мовою теорії ймовірностей, тобто знаходячись у межах класичних понять. Нехай конкретна реалізація станів частинок A і B задається (детермінується) якимось параметром λ ($A(\lambda), B(\lambda)$). Сама величина λ невідома. Можливо, її взагалі не можна виявити жодним експериментом (тобто λ є "прихованим" параметром). Але принципово важливим є те, що λ привносить елемент детермінізму в систему. А це вже само собою спричинює серйозні наслідки. На думку послідовників ЕПР параметр λ може бути саме тим "елементом реальності", який заздалегідь однозначно визначає результат експерименту.

Позначимо ймовірність реалізації того чи іншого значення λ величиною $\rho(\lambda)$ ($\int d\lambda\rho(\lambda) = 1$). Для конкретності можна уявити, що ми маємо справу з двома фотонами у переплутаному стані: один з них поширюється в напрямку (A), а інший – у протилежному (B).

Введемо так звані дихотомічні змінні $A(a,\lambda)$, $B(b,\lambda)$, де $A = 1$, якщо фотон реєструється приладом (детектором), і

$A = -1$, якщо не реєструється. Так само визначаються два значення $B = \pm 1$. Величини a і b характеризують вимірювальні пристрої (наприклад, орієнтації поляризаторів) у плечах A і B, відповідно.

Знайдемо кореляційну функцію (C) двох дихотомічних змінних $A(a)$ та $B(b)$. За означенням ця функція задана виразом:

$$C(a,b) = \langle A(a)B(b) \rangle, \tag{6.4}$$

де кутові дужки означають усереднення за повторюваними експериментами.

У випадку існування "елемента реальності" λ процедуру усереднення можна задати через ймовірність реалізації кожного його значення у вигляді інтегралу:

$$C(a,b) = \int d\lambda A(a,\lambda)B(b,\lambda)\rho(\lambda). \tag{6.5}$$

Фактично, – це класична формула. Оскільки функція $\rho(\lambda)$ за означенням ймовірності завжди більша чи дорівнює нулеві, то можна встановити певні співвідношення у вигляді нерівностей (нерівностей Белла) для кореляційних функцій, знайдених для різних наборів a і b. Важливим є те, що ці нерівності не будуть залежати від конкретного вигляду функції $\rho(\lambda)$, яка залишиться невідомою. Після цього можна буде обчислити кореляційні функції C для заданих умов експерименту (за тих же значень параметрів a і b, що й раніше), але вже з використанням квантового формалізму. Нашою метою буде дослідити, чи задовольняють кореляційні функції, знайдені з використанням квантової теорії, нерівності Белла. Порівняння результатів обчислень з експериментальними вимірами дає змогу встановити, який з двох підходів (класичний чи квантовий) адекватно описує фізичну систему.

6.3. Нерівності Белла

Виходячи з означення кореляційної функції $C(a,b)$ (6.4) та співвідношення (6.5), можемо записати очевидну нерівність:

$$\left|C(a,b)-C(a,b')\right| \leq \\ \leq \int \left|A(a,\lambda)\left[B(b,\lambda)-B(b',\lambda)\right]\right|\rho(\lambda)d\lambda . \tag{6.6}$$

Нерівність очевидна, тому що функцію під знаком інтеграла (яка в загальному випадку може бути знакозмінною) ми замінили її модулем.

Оскільки $|A|=1$, то множник $A(a,\lambda)$ під знаком інтеграла можна опустити, не змінивши при цьому величину інтеграла. Тоді замість (6.6) матимемо:

$$\left|C(a,b)-C(a,b')\right| \leq \int \left|B(b,\lambda)-B(b',\lambda)\right|\rho(\lambda)d\lambda . \tag{6.7}$$

Так само, як і (6.6), можна записати іншу нерівність:

$$\left|C(a',b)+C(a',b')\right| \leq \int \left|A(a',\lambda)\left[B(b,\lambda)+B(b',\lambda)\right]\right|\rho(\lambda)d\lambda ,$$

з якої одержуємо:

$$\left|C(a',b)+C(a',b')\right| \leq \int \left|B(b,\lambda)+B(b',\lambda)\right|\rho(\lambda)d\lambda . \tag{6.8}$$

Додамо почленно ліві та праві частини нерівностей (6.7) і (6.8). У підсумку отримаємо:

$$\left|C(a,b)-C(a,b')\right|+\left|C(a',b)+C(a',b')\right| \leq \\ \leq \int \left\{\left|B(b,\lambda)-B(b',\lambda)\right|+\left|B(b,\lambda)+B(b',\lambda)\right|\right\}\rho(\lambda)d\lambda = \\ = 2\int \rho(\lambda)d\lambda = 2 . \tag{6.9}$$

Тут враховано, що для будь-яких значень дихотомічних змінних лише один з доданків у фігурній дужці відмінний від нуля і дорівнює 2.

Отже,

$$\left|C(a,b)-C(a,b')\right|+\left|C(a',b)+C(a',b')\right| \leq 2 . \tag{6.10}$$

Нерівність (6.10) називають нерівністю Белла. Існують й інші версії нерівностей Белла, які тут не розглядатимемо.

Далі проаналізуємо, чи виконується нерівність (6.10) у випадку поширення двох переплутаних фотонів у різних напрямках.

6.4. Кореляції двох фотонів у синглетному стані

Використаємо традиційну схему експерименту з реєстрації переплутаних фотонів (рис. 25). Наша мета – дослідити кореляції фотонів, що народилися в одному елементарному акті (тобто, когерентних фотонів) і розійшлися в різних напрямках. Переплутаний двочастинковий стан задається хвильовою функцією

$$\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1_{xA},0_{yA},0_{xB},1_{yB}\right\rangle - \left|0_{xA},1_{yA},1_{xB},0_{yB}\right\rangle\right) . \tag{6.11}$$

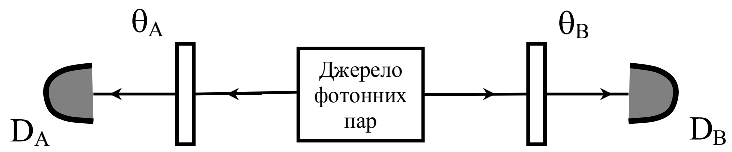

Рис. 25. Джерело генерує світло у двофотонному синглетному стані. Два фотони із взаємно перпендикулярними поляризаціями поширюються в протилежних напрямках A та B. Буквами θ та D позначено відповідно поляризатори та детектори фотонів

Функція (6.11) описує такий стан поля, коли два фотони, поляризовані в перпендикулярних напрямках x та y, поширюються по одному до поляризаторів, позначених на рис. 25 символами q_A та q_B. Очевидно, коли кути $q_A = q_B =$ $= 0$, то $P_{AB} = \langle\psi|\hat{n}'_A\hat{n}'_B|\psi\rangle = 0$, аналогічно до ситуації, за якої спостерігалась повна деструктивна інтерференція. Як і в попередньому розділі, штрих біля оператора ($\hat{n}'$) означає стан після проходження поляризатора. Чому дорівнює кореляційна функція P_{AB} за довільних значеннях q_A та q_B? Якщо ми знайдемо $P_{AB}(\theta_A,\theta_B)$ для довільних значень q_A та q_B, то можна буде знайти і кореляційні функції $C(\theta_A,\theta_B)$ дихотомічних змінних для різних значень параметрів q_A та q_B (тобто, параметрів *a, b* у попередніх позначеннях). Так можна буде перевірити, чи задовольняється нерівність Белла (6.10) під час квантового опису системи.

Проте спочатку знайдемо середнє значення кількості фотонів, зареєстрованих одним із детекторів, наприклад, D_A. Для простоти вважатимемо, що детектори мають 100 % ефективність. З метою скорочення запису позначатимемо $\hat{n}'_{A,B}(\theta_{A,B}) \equiv n(\theta_{A,B})$. Тоді формулу (5.34) для випадку лівого плеча перепишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} n(\theta_A) &= \hat{n}_{xA}cos^2\theta_A + \hat{n}_{yA}\sin^2\theta_A + \\ &+ \frac{1}{2}\sin(2\theta_A)\left(a^+_{xA}a_{yA} + a^+_{yA}a_{xA}\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.12}$$

Індекс "А" означає, що оператори в (6.12) діють лише на ту складову поля, яка поширюється в напрямку А. Середнє значення $\langle n(\theta_A)\rangle$ знаходиться з використанням

явного вигляду хвильової функції (6.11). Враховуючи очевидні співвідношення

$$\hat{n}_{xA}|0_{xA}\rangle = 0, \quad \hat{n}_{xA}|1_{xA}\rangle = |1_{xA}\rangle,$$

$$a^+_{xA}|0_{xA}\rangle = |1_{xA}\rangle, \quad a_{xA}|0_{xA}\rangle = 0,$$

а також аналогічні співвідношення для y-их компонент, легко одержимо:

$$\begin{aligned} \langle\psi|n(\theta_A)|\psi\rangle &= \langle\psi|\hat{n}_{xA}\cos^2\theta_A + \hat{n}_{yA}\sin^2\theta_A + \\ &+ \frac{1}{2}\sin(2\theta_A)\left(a^+_{xA}a_{yA} + a^+_{yA}a_{xA}\right)|\psi\rangle = \\ &= \langle\hat{n}_{xA}\rangle\cos^2\theta_A + \langle\hat{n}_{yA}\rangle\sin^2\theta_A = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{6.13}$$

де також враховано ортогональність різних фоківських станів. Нагадаємо, що всі оператори після першого знаку рівності стосуються поля, яке ще не дійшло до поляризатора.

Для випромінювання, що поширюється в напрямку B, одержимо аналогічний результат, оскільки (6.13) не залежить від кута θ_A. Отже маємо:

$$\langle n(\theta_A)\rangle = \langle n(\theta_b)\rangle = \frac{1}{2}. \tag{6.14}$$

Цей результат можна було очікувати від самого початку, оскільки фотони порівну "розподілені" між напрямками A, B та поляризаціями *x, y*. Коли поляризатор сприятливо орієнтований для проходження x-ї компоненти, то його орієнтація є несприятливою для пропускання y-ї компоненти і навпаки. З рівняння (6.14) видно, що в середньому лише кожен другий фотон проходить крізь поляризатори і його реєструють детектори.

Далі обчислимо кореляційну функцію $P_{AB}(\theta_A,\theta_B)$.

Для скорочення запису введемо, як і в формулі (6.12), нові позначення:

$$a_A \equiv a_{x'A} = a_{xA}\cos\theta_A + a_{yA}\sin\theta_A,$$

$$a_B \equiv a_{x'B} = a_{xB}\cos\theta_B + a_{yB}\sin\theta_B.$$

Тоді кореляційна функція дорівнює:

$$P_{AB}(\theta_A,\theta_B) = \langle\psi|n(\theta_A)n(\theta_B)|\psi\rangle = \langle\psi|a_A^+a_B^+a_Aa_B|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|\left(a_{xA}^+\cos\theta_A + a_{yA}^+\sin\theta_A\right)\left(a_{xB}^+\cos\theta_B + a_{yB}^+\sin\theta_B\right)\times$$

$$\times\left(a_{xA}\cos\theta_A + a_{yA}\sin\theta_A\right)\left(a_{xB}\cos\theta_B + a_{yB}\sin\theta_B\right)|\psi\rangle,$$

де ми врахували, що оператори для різних мод (A і B) комутують між собою. Легко побачити, що після розкриття дужок у другому та третьому рядках одержаного виразу не всі доданки дадуть внесок у ймовірність P_{AB}. Зокрема не буде внеску від членів, що містять добутки $a_{xA}a_{xB}$, $a_{yA}a_{yB}$, та ермітово спряжені до них. Це зумовлено конкретною структурою хвильової функції $|\psi\rangle$ (див. вираз (6.11)).

Із врахуванням зазначеного вираз для P_{AB} спрощується:

$$P_{AB}(\theta_A,\theta_B) = \langle\psi|\left(a_{xA}^+a_{yB}^+\cos\theta_A\sin\theta_B + a_{yA}^+a_{xB}^+\sin\theta_A\cos\theta_B\right)\times$$

$$\times\left(a_{xA}a_{yB}\cos\theta_A\sin\theta_B + a_{yA}a_{xB}\sin\theta_A\cos\theta_B\right)|\psi\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos^2\theta_A\sin^2\theta_B + \cos^2\theta_B\sin^2\theta_A - 2\cos\theta_A\sin\theta_B\cos\theta_B\sin\theta_A\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2(\theta_A - \theta_B) \qquad (6.15)$$

Отже,

$$P_{AB}(\theta_A,\theta_B) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_A - \theta_B). \qquad (6.16)$$

Із виразу (6.16) видно, що за однакових кутів ($\theta_A = \theta_B$) значення P_{AB} дорівнює нулеві. Це збігається із зробленим раніше висновком, що в окремому випадку (за горизонтальної орієнтації поляризаторів $\theta_A = \theta_B = 0$) значення P_{AB} дорівнюють нулеві.

Зазначимо, що розрахунки можна було б істотно спростити, якби від самого початку перейти в систему координат, в якій вісь x орієнтована вздовж напрямку максимального пропускання одного з поляризаторів.

Використаємо кореляційну функцію $P_{AB}(\theta_A,\theta_B)$ для перевірки нерівності Белла. Для цього виразимо ймовірності реалізації різних значень дихотомічних змінних через $P_{AB}(\theta_A,\theta_B)$.

1. Позначимо виразом $P_{AB}(+,\theta_A;+,\theta_B)$ ймовірність зареєструвати обидва фотони після проходження поляризаторів θ_A та θ_B.

Легко побачити, що вона дорівнює $P_{AB}(\theta_A,\theta_B)$, тобто

$$P_{AB}(+,\theta_A;+,\theta_B) = P_{AB}(\theta_A,\theta_B) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_A - \theta_B).$$

2. Величина $P_{AB}(-,\theta_A;+,\theta_B)$ означає ймовірність проходження фотона у напрямку B і непроходження – у напрямку A. Знайдемо її з таких міркувань.

Очевидно, що

$$P_{AB}(-,\theta_A;+,\theta_B) + P_{AB}(+,\theta_A;+,\theta_B) = \langle n_B\rangle = \frac{1}{2}.$$

Звідси одержуємо, що

$$P_{AB}(-,\theta_A;+,\theta_B) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin^2(\theta_A - \theta_B)\right) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_A - \theta_B).$$

3. Ймовірність того, що фотон пройшов у напрямку A і не пройшов у напрямку B $P_{AB}(+,\theta_A;-,\theta_B)$, знаходять із міркувань симетрії. Оскільки проходження фотонів у обох напрямках мають однакову ймовірність, то

$$P_{AB}(+,\theta_A;-,\theta_B) = P_{AB}(-,\theta_A;+,\theta_B).$$

4. Ймовірність того, що фотони відсутні на виходах з обох поляризаторів $P_{AB}(-,\theta_A;-,\theta_B)$, визначається умовою, що сума всіх ймовірностей має дорівнювати одиниці.

Тоді

$$P_{AB}(-,\theta_A;-,\theta_B) = 1 - P_{AB}(+,\theta_A;-,\theta_B) - P_{AB}(-,\theta_A;+,\theta_B) - \\ -P_{AB}(+,\theta_A;+,\theta_B) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_A - \theta_B).$$

Відтак,

$$P_{AB}(-,\theta_A;-,\theta_B) = P_{AB}(+,\theta_A;+,\theta_B) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_A - \theta_B),$$

$$P_{AB}(-,\theta_A;+,\theta_B) = P_{AB}(+,\theta_A;-,\theta_B) = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_A - \theta_B). \quad (6.17)$$

Тепер маємо усі потрібні величини для знаходження кореляційної функції $C_{AB}(\theta_A,\theta_B)$.

Нагадаємо, що дихотомічна змінна $A = 1$, коли фотон реєструє детектор D_A, і $A = -1$, коли не реєструє.

Аналогічна ситуація і для змінної B. Тоді, перемножаючи значення дихотомічних змінних та домножуючи їх на ймовірності набувати саме таких значень, тобто значень (6.17), легко одержимо для суми по всіх реалізаціях величин A і B:

$$C_{AB}(\theta_A,\theta_B) = \sin^2(\theta_A - \theta_B) - \cos^2(\theta_A - \theta_B) = \\ = -\cos 2(\theta_A - \theta_B). \quad (6.18)$$

Знайдемо величину $C_{AB}(\theta_A,\theta_B)$ для такого набору параметрів:

$$\theta_A = 0, \quad \theta'_A = -\frac{\pi}{4}, \quad \theta_B = \frac{3\pi}{8}, \quad \theta'_B = \frac{\pi}{8}. \quad (6.19)$$

Тоді

$$C_{AB}(\theta_A,\theta_B) = -\cos\left(2\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$C_{AB}(\theta_A,\theta'_B) = -\cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$C_{AB}(\theta'_A,\theta_B) = -\cos\left(2\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$C_{AB}(\theta'_A,\theta'_B) = -\cos\left(2\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (6.20)$$

Підставляючи значення (6.20) до лівої частини (6.10), одержимо:

$$\left|C_{AB}(\theta_A,\theta_B) - C_{AB}(\theta_A,\theta'_B)\right| + \\ + \left|C_{AB}(\theta'_A,\theta_B) + C_{AB}(\theta'_A,\theta'_B)\right| = 2\sqrt{2} > 2. \quad (6.21)$$

Як бачимо з (6.21), нерівність Белла не виконується. Нагадаємо, що ми використали квантовий формалізм для розрахунків кореляційних функцій дихотомічних змінних. Оскільки реальні експерименти також показали, що нерівність Белла не виконується, то тим самим гіпотезу “прихованих” параметрів було фактично спростовано.

6.5. Створення квантових криптографічних ключів з використанням переплутаних станів фотонів

Проблема засекречування інформації, що розповсюджується між учасниками зв'язку, існує з прадавніх часів. Зокрема ще спартанці кодували письмові тексти, записуючи їх на стрічці, що була намотана на конусоподібну булаву. Слова утворювались літерами, що стояли поруч у напрямку осі булави. Особа, яка одержувала повідомлення у вигляді стрічки, могла легко прочитати його, намотавши стрічку на булаву, форма якої була такою ж, як у відправника. У цьому випадку булава відігравала роль криптографічного ключа.

Юлій Цезар засекречував свої тексти інакше. Кожну літеру тексту замінювали на ту літеру, що стояла за нею в алфавіті на три позиції далі. Такий метод шифрування, незалежно від інтервалу зміщення, називають шифром Цезаря.

Одночасно з розвитком криптографії (тобто методів створення криптографічних кодів) розвивався і криптоаналіз – мистецтво зламування (розсекречування) кодів. Запропоновані порівняно недавно методи квантової криптографії широко досліджують і вже знайшли практичне застосування. Вони відкривають перспективи повної захищеності інформації, що передається. Далі на конкретному прикладі ознайомимося з можливим протоколом квантової криптографії.

Якщо відправнику та одержувачу відома якась послідовність чисел (криптографічний ключ), то кожну літеру повідомлення можна замінити числом (наприклад, її порядковим номером в алфавіті), далі додати відповідне число з ключа (наприклад, число, порядковий номер якого в ключі дорівнює порядковому номеру літери в тексті повідомлення) і уже таке модифіковане повідомлення надіслати одержувачу відкритим текстом. Якщо ключ є послідовністю випадкових чисел, довжина якої не менша від довжини повідомлення, то дешифровка без ключа є неможливою.

Звичайно, на практиці алгоритм шифрування може бути зовсім іншим. Важливим є те, що сам метод шифрування може бути несекретним. Секретним має бути лише сам ключ, який створюють для кожного індивідуального повідомлення. При цьому відпадає потреба збереження в таємниці і методу шифрування, і криптографічних ключів, оскільки останні використовують лише раз.

Створення і передача квантових криптографічних ключів може здійснюватись за допомогою переплутаних двофотонних станів, які було описано у попередньому параграфі. Як і раніше, пари фотонів генеруються у синглетному двочастинковому стані, хвильову функцію якого можна записати у вигляді (6.11):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big|1_{xA},0_{yA},0_{xB},1_{yB}\big\rangle - \big|0_{xA},1_{yA},1_{xB},0_{yB}\big\rangle\Big). \qquad (6.22)$$

Фотони, що поширюються у напрямках A і B (Alice і Bob), попадають спочатку на поляризатори, далі на пари детекторів, які розміщені в різних напрямках (рис. 26). Якщо поляризатори однаково орієнтовані (наприклад, пропускають світло, поляризоване вздовж осі x), то у випадку, коли спрацює детектор D_A у пропускному напрямку, має також спрацювати і детектор D_B, що реєструє відбитий від поляризатора θ_B промінь. Це випадок, коли в процесі редукції хвильової функції реалізувався стан, який описується першим доданком у круглій дужці (6.22). Про таку орієнтацію поляризаторів говоритимемо як про ситуацію, коли обидва вимірювальні пристрої перебувають в однаковому базисі ($\oplus$). Факт детектування позначимо числом 1. Якби сигнали на вказаних детекторах були відсутні, а натомість з'явилися на іншій парі детекторів, то результат такого вимірювання позначається числом 0. Під час багатократного повторення описаної операції ми одержали б якусь числову послідовність

$$1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots, \qquad (6.23)$$

яка складається з випадкових значень (0 чи 1) і випадковий характер появи цих значень має фундаментальну природу, оскільки зумовлений квантовим індетермінізмом, а саме – рівноймовірною реалізацією обох частин хвильової функції (6.22) у процесі вимірювань. Обидва партнери (A і B) мають ідентичні послідовності, з яких вони можуть сформувати криптографічний ключ. Звичайно, частина фотонів може не дійти до обох партнерів. Такі вимірювання (коли хоча б у одному плечі не спрацьовують обидва детектори) не використовуються для формування ключа.

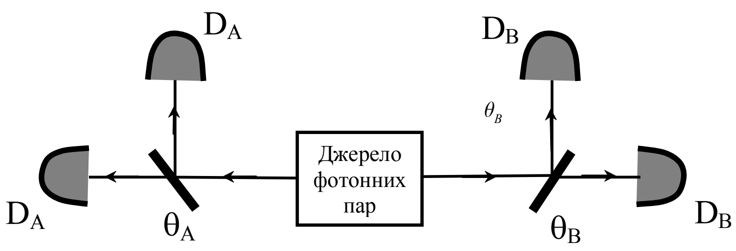

Рис. 26. Схема поширення і реєстрації фотонних пар у синглетному стані. Фотон, який попадає на поляризатор θ_A чи θ_B, далі реєструють одним з двох детекторів у відповідному плечі

Схема передачі криптографічних ключів, що описана вище, не забезпечує їхнього захисту від "підслуховування". Третя сторона, Єва (Eve), може перехоплювати всю інформацію, що спрямована до одного з партнерів, робити такі

ж вимірювання, як зображено на схемі (рис. 26), далі створювати копію перехопленого фотона і пересилати її далі. У цьому випадку всі три учасники мали б однакові ключі.

Для захисту інформації в комунікаційну схему вводиться ще одна випадкова змінна. Це випадкова орієнтація поляризаторів учасниками A і B. Наприклад, Аліса може повернути свій поляризатор на кут 45° ($\theta_A = 45^\circ$) за годинниковою стрілкою. Таку орієнтацію вимірювального пристрою позначимо символом ($\otimes$). Учасники можуть наперед домовитись, що реєстрація пройденого сигналу тим же детектором D_A знову означатиме число 1. Тоді, якщо поляризатор Боба повернутий на такий же кут, ситуація зводиться до тієї, яку ми розглянули для випадку ($\oplus$). Якщо ж його поляризатор залишиться в базисі ($\oplus$), то він одержуватиме з однаковою ймовірністю (що дорівнює 1/2) значення чисел 0 і 1 незалежно від того, яке число зафіксоване Алісою (див. формулу (6.16) для випадку $\theta_A - \theta_B = 45^\circ$). Тому випадки з різною орієнтацією поляризаторів також потрібно вилучити з розгляду під час виконання процедури створення ключа. Це робиться відкрито: після закінчення зв'язку партнери повідомляють один одному про те, в якому стані знаходились поляризатори під час детектування кожної пари фотонів і вилучають інформацію, одержану за різних орієнтацій поляризаторів. Звичайно, при цьому вони не повідомляють про результати детектування.

Якщо Єва перехопила фотон, що надісланий Бобу, вона не може знати, в якій орієнтації знаходиться поляризатор Аліси. Тоді вона надішле Бобу фотон, який у половині випадків дасть "неправильний" відлік на його детекторах. "Неправильний" означає відлік, що відрізняється від того, який був би без зовнішнього втручання. Факт втручання можна легко виявити після закінчення сеансу зв'язку. Для цього досить порівняти частину ключа, що сформували Аліса і Боб. Цю процедуру також можна виконати у відкритому режимі, після чого розсекречену частину ключа потрібно вилучити з використання. Значна кількість розбіжностей у показаннях детекторів вказуватиме на втручання третьої сторони, що інформуватиме Алісу й Боба про потребу припинити сеанс зв'язку.

Факт підслуховування можна також виявити, використовуючи нерівності Белла (6.10). Пояснимо це докладніше. Нехай, за домовленістю, Аліса та Боб випадково обирають такі орієнтації своїх поляризаторів:

$$\begin{aligned} \theta_A &= 0; \quad \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{8}; \\ \theta_B &= 0; \quad -\frac{\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{8}. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Як видно з (6.24), тільки у двох випадках з дев'яти випадкові значення θ_A та θ_B є однаковими. Для підстановки в нерівності Белла використаємо лише випадки, коли в процесі зв'язку реалізовувались різні орієнтації поляризаторів:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{\pi}{4}; \quad \theta'_A = 0; \\ \theta_B &= -\frac{\pi}{8}; \quad \theta'_B = \frac{\pi}{8}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\left|C(\theta_A,\theta_B) - C(\theta_A,\theta'_B)\right| + \left|C(\theta'_A,\theta_B) + C(\theta'_A,\theta'_B)\right| = \\ &= \left|-\cos 2(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}) + \cos 2(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8})\right| + \\ &+ \left|-\cos 2\frac{\pi}{8} - \cos 2\frac{\pi}{8}\right| = 2\sqrt{2} \end{aligned} \quad . \tag{6.26}$$

Значення кореляційних функцій (6.18), які ми підставили в (6.26), визначаються явним виглядом хвильової функції (6.22). Якщо ж детектори реєструють фотони, "створені" Євою, напрямки поляризації яких не скорельовані з фотонами, зареєстрованими Алісою, то права частина (6.26) буде істотно меншою, ніж $2\sqrt{2}$. Саме ця обставина дає змогу виявити факт підслуховування.

A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. *Can Quantum-mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?* – Phys. Rev., 1935. – **47**. – P. 777–780.

J. S. Bell. *On the problem of hidden variables in quantum theory*. – Rev. Mod. Phys., 1966. – **38**. – P. 447–452.

Д. Бауместер, А. Экерт, А. Цайлингер. *Физика квантовой информации*. – Москва: Постмаркет, 2002. – 376 с.

Задачі

1. Показати, що функція (6.11) є власною функцією оператора повної кількості частинок.

Знайти відповідне власне значення. Чи є вона власною функцією оператора $n(\theta_A)$ (див. (6.12))?

2. Знайти ймовірність $P_{AB}(\theta_A,\theta_B)$ для випадку, коли поле перебуває у двофотонному стані, що задається виразом

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1_{xA},0_{yA},0_{xB},1_{yB}\right\rangle + \left|0_{xA},1_{yA},1_{xB},0_{yB}\right\rangle\right).$$

7. Деякі теореми операторної алгебри. Матриці Паулі

Оскільки динамічні змінні, за допомогою яких описують квантові явища, – це оператори, що діють у гільбертовому просторі векторів станів, то для розв'язку конкретних задач корисно мати певні співвідношення між такими операторами. Цей розділ містить доведення деяких найважливіших операторних теорем, використання яких дасть змогу істотно спростити і скоротити подальший виклад матеріалу.

7.1. Теорема про операторний розклад

Нехай є два оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$, що не обов'язково комутують між собою. Розглянемо функцію від цих операторів $f(x)$, задану у вигляді

$$f(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}, \qquad (7.1)$$

де x – довільне *c*-число.

Як видно з (7.1), функція f залежить від x лише тоді, коли оператори $\hat{A}$ і $\hat{B}$ не комутують між собою. Але часто буває, що комутатор $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ або ж якийсь з комутаторів вищого порядку є константою. Тоді оператор (7.1) значно спрощується: замість експоненціальної залежності від $\hat{A}$ він виразиться лінійно через усі нижчі комутатори такі як $\left[A...\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]$ та згадану константу.

Щоб переконатись у цьому, розглянемо оператор f як звичайну функцію змінної x і запишемо його у вигляді ряду Тейлора:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + ... \qquad (7.2)$$

Враховуючи означення (7.1), можна знайти похідні, що входять у (7.2):

$$f(x=0) = \hat{B};$$

$$f'(x) = e^{x\hat{A}}\left[\hat{A},\hat{B}\right]e^{-x\hat{A}}, \qquad f'(x=0) = \left[\hat{A},\hat{B}\right];$$

$$f''(x) = e^{x\hat{A}}\left[\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]e^{-x\hat{A}}, \qquad f''(x=0) = \left[A\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]; \; ... \qquad (7.3)$$

Підставляючи значення похідних (7.3) у (7.2), одержимо загальний вираз для $f(x)$:

$$f(x) = e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + \frac{x}{1!}\left[\hat{A},\hat{B}\right] + \frac{x^2}{2!}\left[A,\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + ... \qquad (7.4)$$

Представлення функції $f(x)$ у вигляді ряду (7.4) виражає суть теореми про операторний розклад. З нього можна одержати деякі корисні співвідношення. Зокрема, якщо комутатор n-го порядку є c-числом, то всі наступні комутатори дорівнюють нулеві. У цьому випадку ряд у (7.4) закінчується n-м членом.

У найпростішому випадку $n=1$, $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = C$ ряд обривається уже на другому члені й функція $f(x)$ дорівнює:

$$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = \hat{B} + xC. \qquad (7.5)$$

Як бачимо, дія оператора $\hat{A}$ зводиться до додавання якогось числа (xC) до $\hat{B}$. Зокрема, коли $\hat{B}$ та $\hat{A}$ є лінійними функціями координати та імпульсу (наприклад, $\hat{B} = q$, а $\hat{A} = i\hat{p}/\hbar = \partial_q$), то $C = \left[\partial_q, q\right] = 1$ і тоді

$$e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}} = q + x\,. \tag{7.6}$$

Інші приклади:

$$x = 1;\quad \hat{B} = a; a^+;\quad \hat{A} = -va^+ + v^*a\,. \tag{7.7}$$

Тоді, якщо $\hat{B} = a$, то комутатор дорівнює

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \left[-va^+ + v^*a, a\right] = v\,.$$

Якщо $\hat{B} = a^+$, то $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = v^*$.

Остаточно маємо:

$$e^{-va^+ + v^*a}ae^{va^+ - v^*a} = a + v;$$
$$e^{-va^+ + v^*a}a^+e^{va^+ - v^*a} = a^+ + v^*\,. \tag{7.8}$$

Якщо $\hat{A} = \hat{n} = a^+a,\ \hat{B} = a$, то

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = a^+aa - aa^+a = -a;\quad \left[\hat{A}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = a;\ldots$$

Легко переконатися, що в цьому конкретному випадку усі члени ряду (7.2) відмінні від нуля.

Та, оскільки в загальному члені ряду n-й комутатор $\underbrace{\left[A...\left[A,B\right]\right]}_{n}$ дорівнює $(-1)^n a$, то весь ряд можна просумувати. У підсумку одержимо:

$$e^{x\hat{n}}ae^{-x\hat{n}} = e^{-x}a\,. \tag{7.9}$$

Здійснюючи операцію ермітового спряження над лівою та правою частинами (7.9) та замінюючи $x \to -x$, легко одержимо:

$$e^{x\hat{n}}a^+e^{-x\hat{n}} = e^{x}a^+\,. \tag{7.10}$$

Формули (7.9) та (7.10) дають змогу знайти у явному вигляді часову залежність операторів $a(t)$ і $a^+(t)$, що задані у представленні Гайзенберґа:

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}ae^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t} = e^{it\omega a^+a}ae^{-it\omega a^+a} = \\ &= e^{-i\omega t}a,\quad a^+(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t}a^+e^{-\frac{i}{\hbar}\mathrm{H}t} = e^{i\omega t}a^+\,. \end{aligned} \tag{7.11}$$

І останній приклад, нехай $\hat{A} = \dfrac{1}{2}q^2,\quad B = \partial_q$.

Тоді $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = -q$ і $e^{\frac{1}{2}xq^2}\partial_q e^{-\frac{1}{2}xq^2} = \partial_q - qx$.

7.2. Теореми про перетворення подібності

Візьмемо праву частину рівняння (7.1) і піднесемо її до n-ї степені:

$$\left(e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}\right)^n = e^{x\hat{A}}\hat{B}^n e^{-x\hat{A}}\,. \tag{7.12}$$

Звідси випливає, що для будь-якої функції $F(\hat{B})$, яку можна розкласти в ряд Тейлора по $\hat{B}$, виконується рівність:

$$e^{x\hat{A}}F\left(\hat{B}\right)e^{-x\hat{A}} = F\left(e^{x\hat{A}}\hat{B}e^{-x\hat{A}}\right). \tag{7.13}$$

Існує подібне до (7.13), але загальніше співвідношення між якимись операторами $\hat{G}$ та $\hat{B}$. Воно означає, що якщо у якогось оператора $\hat{G}$ існує обернений оператор $\hat{G}^{-1}$, то справджується очевидна тотожність

$$\hat{G}F\left(\hat{B}\right)\hat{G}^{-1} = F\left(\hat{G}\hat{B}\hat{G}^{-1}\right). \tag{7.14}$$

Якщо комутатор $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ є c-числом, то, використовуючи (7.1), легко знаходимо:

$$e^{x\hat{A}}F\left(\hat{B}\right)e^{-x\hat{A}} = F\left(\hat{B} + Cx\right). \tag{7.15}$$

В окремому випадку $F(\hat{B}) = \hat{B}$ (7.15) збігається з (7.5).

Корисними є також такі співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&e^{xq^2/2}F(\partial_q)e^{-xq^2/2}=F(\partial_q-qx);\\
&e^{-va^++v^*a}F(a,a^+)e^{va^+-v^*a}=F(a+v,a^++v^*);\\
&e^{x\hat{n}}F(a,a^+)e^{-x\hat{n}}=F\left(e^{-x}a,e^{x}a^+\right).
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

7.3. Теореми про похідні від операторних функцій

Нехай є якась функція від операторів народження та знищення $f(a,a^+)$. Визначимо похідну від цієї функції по a виразом:

$$
\frac{\partial f(a,a^+)}{\partial a}=\lim_{\delta v\to 0}\frac{f(a+\delta v,a^+)-f(a,a^+)}{\delta v}. \tag{7.17}
$$

Використовуючи формулу в другому рядку (7.16), вираз у правій частині (7.17) можна переписати у вигляді:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta v\to 0}\frac{f(e^{-\delta v a^+}ae^{\delta v a^+},a^+)-f(a,a^+)}{\delta v}=\\
&=\lim_{\delta v\to 0}\frac{(1-\delta v a^+)f(a,a^+)(1+\delta v a^+)-f(a,a^+)}{\delta v}=\\
&=-\left[a^+,\,f(a,a^+)\right]
\end{aligned}
$$

І остаточно,

$$
\frac{\partial f(a,a^+)}{\partial a}=-\left[a^+,\,f(a,a^+)\right]. \tag{7.18}
$$

Похідну по a^+ одержуємо з формули (7.18), застосувавши до останньої операцію ермітового спряження:

$$
\frac{\partial f(a,a^+)}{\partial a^+}=\left[a,\,f(a,a^+)\right]. \tag{7.19}
$$

Для ілюстрації конкретних застосувань співвідношень (7.18) та (7.19), розглянемо деякі приклади.

Нехай

$$
f(a)=a^n.
$$

Тоді

$$
\frac{\partial f}{\partial a}=na^{n-1}.
$$

Звідси одержуємо

$$
\left[a^+,a^n\right]=-na^{n-1};\quad \left[a,\left(a^+\right)^n\right]=n\left(a^+\right)^{n-1}. \tag{7.20}
$$

Якщо $f(a,a^+)=e^{va^+}$, то $\dfrac{\partial f}{\partial a^+}=ve^{va^+}$ і тоді

$$
\left[a,e^{va^+}\right]=ve^{va^+}. \tag{7.21}
$$

Із (7.21) одержимо аналогічне співвідношення:

$$
\left[a^+,e^{-v^*a}\right]=v^*e^{-v^*a}. \tag{7.22}
$$

За конкретних розрахунків корисно використовувати такі правила знаходження похідних. Зокрема, коли знаходять похідні $\dfrac{\partial}{\partial a},\dfrac{\partial}{\partial a^+}$ від довільних добутків типу $a^+a^+aa^+a...$, то, враховуючи (7.18) та тотожність (4.12), одержимо:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial a}\left(a^+a^+aa^+a\ldots\right)=-\left[a^+,a^+a^+aa^+a\ldots\right]=\\
&=-a^+a^+\left[a^+,a\right]a^+a\ldots-a^+a^+aa^+\left[a^+,a\right]\ldots=\\
&=a^+a^+a^+a\ldots+a^+a^+aa^+\ldots
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

Можна легко переконатись, що взяття похідної від добутку операторів відбувається за тим самим правилом, що й взяття похідної від добутку функцій.

Як видно з (7.23), оператор $\frac{\partial}{\partial a}$ комутує з операторами a^+, які є в добутку.

Аналогічно оператор $\frac{\partial}{\partial a^+}$ комутує з операторами a. Практичну користь правила взяття похідної по оператору можна побачити на такому прикладі.

Нехай є оператор

$$f(x) = e^{xa^+a}, \tag{7.24}$$

який потрібно привести до нормально впорядкованого вигляду. Таке впорядкування означає, що всі оператори народження знаходяться ліворуч від операторів знищення.

Візьмемо похідну від функції $f(x)$ по параметру x:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = a^+ae^{xaa^+}. \tag{7.25}$$

Праву частину (7.25) можна подати у такому вигляді:

$$a^+af = a^+\left(fa + [a, f]\right) = a^+\left(fa + \frac{\partial f}{\partial a^+}\right). \tag{7.26}$$

Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a^+\left(fa + \frac{\partial f}{\partial a^+}\right). \tag{7.27}$$

Нормально впорядкована функція $f(x)$ має такий загальний вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{+n} a^n, \tag{7.28}$$

де коефіцієнти C_n є поки що невідомими функціями параметра x.

Підставимо це значення в обидві частини (7.27):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial C_n}{\partial x} a^{+n} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n a^{+n+1} a^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n n a^{+n} a^n. \tag{7.29}$$

Прирівнюючи у правій і лівій частинах (7.29) коефіцієнти біля членів з однаковими степенями $a^{+n}a^n$, одержимо систему рівнянь для коефіцієнтів C_n:

$$\frac{\partial C_n}{\partial x} - nC_n = C_{n-1}, \;\; n > 0. \tag{7.30}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial x} = 0. \tag{7.31}$$

Оскільки коефіцієнт C_0 не залежить від x, то його значення можна знайти в окремому випадку $x = 0$, де $f(x = 0) = 1$. Тоді, враховуючи, що в розкладі (7.28) всі значення $C_n(x = 0)$, $n \neq 0$ мають дорівнювати нулеві, то C_0 слід прирівняти до одиниці. Легко переконатись, що рівності (7.30), (7.31) задовольняються значеннями

$$C_n = \left(e^x - 1\right)^n / n!. \tag{7.32}$$

Вираз (7.32) можна легко знайти з розв'язку рівняння (7.30):

$$C_n(x) = \int_0^x dx' e^{n(x-x')} C_{n-1}(x')$$

або ж методом математичної індукції. Отже, нормально впорядкований оператор (7.24) має вигляд:

$$e^{xa^+a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^x - 1\right)^n}{n!} a^{+n} a^n. \tag{7.33}$$

Формулу (7.33) використаємо в розділі 8 для знаходження так званого рівноважного Q-розподілу.

Інший метод одержання формули (7.33) використано під час розв'язку задачі **6**. Процедура впорядкування операторних функцій загальнішого вигляду, а саме:

$$f(a,a^+) = F(a^+a),$$

де F – довільна функція, описана в монографії Луїзелла.

7.4. Дія деяких операторів на нормально та антинормально впорядковані функції

У випадку антинормального впорядкування оператори народження фотонів знаходяться праворуч від операторів знищення. Нормально впорядковані функції позначатимемо символом $N\left(f^N\right)$, а антинормально впорядковані – символом $A(f^A)$.

Оскільки обидва типи функцій відіграють важливу роль під час побудови математичного апарату квантової оптики, то буде корисним одержати співвідношення, що спрощують процедуру впорядкування у деяких конкретних випадках. Вона ґрунтується на методі знаходження похідних від операторних функцій, який було описано вище.

Нехай маємо добуток $a f^N\left(a, a^+\right)$, який не є нормально впорядкованою функцією. Тоді, застосовуючи правило взяття похідної (7.19), одержимо:

$$af^N(a,a^+) = f^N(a,a^+)a + \frac{\partial}{\partial a^+} f^N(a,a^+), \tag{7.34}$$

де права частина вже є нормально впорядкованою функцією.

Для антинормального впорядкування подібна тотожність має вигляд:

$$a^+ f^A(a,a^+) = f^A(a,a^+)a^+ - \frac{\partial}{\partial a} f^A(a,a^+). \tag{7.35}$$

Очевидним узагальненням виразу (7.34) на випадок, якщо в лівій частині замість множника a стоїть a^n (n – ціле число), є формула

$$a^n f^N(a,a^+) = :\left(a + \frac{\partial}{\partial a^+}\right)^n f^N(a,a^+):, \tag{7.36}$$

де символом $(:\ldots:)$ позначена операція нормального впорядкування. Її можна легко довести методом математичної індукції.

7.5. Теорема Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа

Нехай $\hat{A}, \hat{B}$ – два оператори, що не комутують один з одним, але комутують з їхнім комутатором, тобто

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] \neq 0, \quad \left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] = 0. \tag{7.37}$$

Доведемо, що

$$e^{x(\hat{A}+\hat{B})} = e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]} = e^{x\hat{B}} e^{x\hat{A}} e^{\frac{1}{2}x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]}. \tag{7.38}$$

Позначимо

$$\hat{C} = e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}}. \tag{7.39}$$

Похідна оператора $\hat{C}$ по параметру x дорівнює:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{C}}{\partial x} &= \hat{A} e^{x\hat{A}} e^{x\hat{B}} + e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{x\hat{B}} = \\ &= \left(\hat{A} + e^{x\hat{A}} \hat{B} e^{-x\hat{A}}\right)\hat{C} = \left(\hat{A} + \hat{B} + x\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right)\hat{C}, \end{aligned} \tag{7.40}$$

де останні два доданки в круглих дужках одержані з використанням теореми про операторний розклад.

Цю ж похідну можна записати по-іншому:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{C}}{\partial x} &= e^{x\hat{A}}\hat{A}e^{x\hat{B}} + e^{x\hat{A}}e^{x\hat{B}}\hat{B} = \\ &= \hat{C}\left(\hat{B} + e^{-x\hat{B}}\hat{A}e^{+x\hat{B}}\right) = \hat{C}\left(\hat{A} + \hat{B} + x\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right).\end{aligned} \tag{7.41}$$

Оскільки вирази після останніх знаків рівності в (7.40) та (7.41) дорівнюють один одному, то можна стверджувати, що оператор $\hat{C}$ комутує із сумою операторів $\hat{A} + \hat{B} + x\left[\hat{A},\hat{B}\right]$. Ці величини поводяться одна відносно одної як c-числа. Тому можна розглядати одну з рівностей, наприклад,

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial x} = \hat{C}\left(\hat{A} + \hat{B} + x\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right). \tag{7.42}$$

як звичайне диференціальне рівняння для невідомої функції $\hat{C}(x)$. Його розв'язок, що задовольняє початкову умову $\hat{C}(0) = 1$, має вигляд

$$\hat{C}(x) = e^{x\left(\hat{A}+\hat{B}+\frac{x}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right)} = e^{x\left(\hat{A}+\hat{B}\right)}e^{\frac{1}{2}x^2\left[\hat{A},\hat{B}\right]}. \tag{7.43}$$

Із означення функції $\hat{C}(x)$ одержимо співвідношення (7.38).

7.6. Алгебра матриць Паулі

У процесах взаємодії світла з атомами особливе місце займає ситуація, коли частота випромінювання ω близька до частоти переходу між якимось двома рівнями

$$\omega \approx \frac{1}{\hbar}\left(E_1 - E_0\right),$$

де $E_{1,0}$ – енергії верхнього та нижнього рівнів, відповідно.

Коли інші частоти атомних переходів значно відрізняються від ω, то багато процесів взаємодії світла з атомом можна описувати, використовуючи хвильові функції лише цих двох станів. У цьому випадку атом можна розглядати як дворівневу систему, для якої дві функції $|0\rangle$ та $|1\rangle$ утворюють базис.

Відповідний гамільтоніан матиме вигляд:

$$\mathrm{H}_a = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|, \tag{7.44}$$

або в матричній формі

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_a &= \begin{vmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{vmatrix} = \frac{E_0 + E_1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \frac{E_1 - E_0}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \frac{E_0 + E_1}{2}\hat{I} - \frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z,\end{aligned} \tag{7.45}$$

де $\hat{I}$ – одинична матриця; $\hat{\sigma}_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ – матриця Паулі; $\hbar\omega_a = E_1 - E_0$ – відстань між рівнями.

Зазвичай, частину гамільтоніану, що пропорційна одиничній матриці $\hat{I}$, не беруть до уваги, оскільки вона має однакові власні значення. У цьому випадку гамільтоніан дворівневої системи набуває вигляду:

$$\mathrm{H}_a = -\frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z, \tag{7.46}$$

тобто стає подібним до гамільтоніана спіна ($s = 1/2$) в магнітному полі. Під час опису взаємодії атома з полем чи термостатом зручно використовувати й інші матриці Паулі, а саме:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \tag{7.47}$$

а також лінійні комбінації останніх

$$\hat{\sigma}_{+} = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_{x} + i\hat{\sigma}_{y}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_{-} = \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_{x} - i\hat{\sigma}_{y}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{7.48}$$

Матриці $\hat{\sigma}_{x,y,z}$ відповідають самоспряженим операторам і їх широко використовують не лише в теоріях спінових явищ та взаємодії світла з атомами, а й для опису кубітів на джозефсонівських контактах чи поведінки частинок у двоямному потенціалі, наприклад, у стеклах.

Два базисні вектори стану можна подати як матриці, що мають лише один ненульовий стовпчик, тобто

$$|0\rangle = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \tag{7.49}$$

Легко побачити, що функції (7.49) є власними функціями гамільтоніана (7.47) з власними значеннями $\mp\hbar\omega_{a}/2$, відповідно.

Дія операторів $\hat{\sigma}_{+}$ та $\hat{\sigma}_{-}$ на хвильові функції верхнього та нижнього станів $|1\rangle$, $|0\rangle$, переводить їх у нижній та верхній стани:

$$\hat{\sigma}_{+}|1\rangle = |0\rangle, \quad \hat{\sigma}_{-}|0\rangle = |1\rangle. \tag{7.50}$$

Аналогічно одержуємо:

$$\hat{\sigma}_{+}|0\rangle = \hat{\sigma}_{-}|1\rangle = 0. \tag{7.51}$$

Під час конкретних обчислень можуть бути корисними такі співвідношення між введеними вище матрицями:

$$\hat{\sigma}_{x}\hat{\sigma}_{y} = i\hat{\sigma}_{z}, \quad \hat{\sigma}_{z}\hat{\sigma}_{x} = i\hat{\sigma}_{y}, \quad \hat{\sigma}_{y}\hat{\sigma}_{z} = i\hat{\sigma}_{x};$$

$$\hat{\sigma}_{-}\hat{\sigma}_{+} = \frac{1}{2}(1 - \hat{\sigma}_{z}), \quad \hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_{z});$$

$$\hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{z} = -\hat{\sigma}_{z}\hat{\sigma}_{+} = -\hat{\sigma}_{+}, \quad \hat{\sigma}_{-}\hat{\sigma}_{z} = -\hat{\sigma}_{z}\hat{\sigma}_{-} = \hat{\sigma}_{-}. \tag{7.52}$$

Їх усіх одержують із використанням відомих правил знаходження добутку матриць, що містяться у лівих частинах рівнянь (7.52).

W. H. Louisell. *Radiation and Noise in Quantum Electronics.* – NY: Huntington, 1977.

Задачі

1. Показати, що якщо $\hat{A}$ і $\hat{B}$ два некомутуючі оператори, то

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\hat{A}} = \exp\left(e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}\right).$$

2. Довести, що виконуються такі комутаційні співвідношення для операторів:

$$\left[a^{+}a, a^{+m}\right] = ma^{+m}$$
$$\left[a^{+}a, a^{m}\right] = -ma^{m},$$

де m – ціле число.

3. Якщо x – c-число, а m – ціле число, то справджуються співвідношення:

$$e^{xa}a^{+m} = \left(a^{+} + x\right)^{m} e^{xa};$$
$$e^{xa^{+}}a^{m} = \left(a - x\right)^{m} e^{xa^{+}}.$$

Вказівка.

Можна використати теорему подібності та співвідношення (7.8).

4. Показати, що

$$e^{xa} f(a^{+})|0\rangle = f(a^{+} + x)|0\rangle$$

де x – c-число, а для функції $f(a^+)$ існує розклад у ряд Тейлора.

Вказівка.

Використати тотожність $e^{xa}|0\rangle = |0\rangle$.

5. Показати, що $e^{xa^+a} f(a^+)|0\rangle = f(a^+e^x)|0\rangle$.

Вказівка.

Використати тотожність $e^{xa^+a}|0\rangle = |0\rangle$.

6. Довести, що після нормального впорядкування оператор $f(a,a^+) = e^{xa^+a}$ набуває вигляду (7.33).

Розв'язок

Поставимо у відповідність кожній парі операторів a, a^+ пару c-чисел $\overline{a}, \overline{a}^+$ і вважатимемо, що існує якийсь оператор $\aleph$, під час дії якого на довільний добуток $\overline{a}^k \cdot \overline{a}^{+l}$ останній перетворюється на нормально впорядкований добуток операторів: $\aleph\{\overline{a}^k \overline{a}^{+l}\} = a^{+l}a^k$.

Очевидно, коли ми маємо будь-яку нормально впорядковану функцію $f^{(N)}(a,a^+)$ і замінимо в ній a на $\overline{a}$, a^+, на $\overline{a}^+$, тобто $f^{(N)}(a,a^+)$ на $f^{(N)}(\overline{a},\overline{a}^+)$, то оператор $\aleph$ здійснює обернене перетворення:

$$\aleph\{f^{(N)}(\overline{a},\overline{a}^+)\} = f^{(N)}(a,a^+). \tag{1}$$

Знайдемо похідну від функції $f(a,a^+) = e^{xa^+a}$ по x. Вона дорівнює:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a^+af. \tag{2}$$

Очевидно, що множник a^+a можна розташувати і ліворуч, і праворуч від f, оскільки a^+a і f комутують.

Припустимо, що ми знаємо нормально впорядкований вигляд функції f, тобто $f^{(N)}(a,a^+)$. Тоді, замінюючи в (2) функцію f на $f^{(N)}$, одержимо:

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial x} = a^+\left[f^{(N)}a + \frac{\partial f^{(N)}}{\partial a^+}\right], \tag{3}$$

де ми застосували до правої частини рівняння (2) формулу (7.34). Видно, що і права, і ліва частини (3) є нормально впорядкованими. Вище пояснено, що таку ж рівність одержимо, якщо у виразі (3) замінимо a на $\overline{a}$, a^+ на $\overline{a}^+$ і водночас подіємо на обидві частини оператором $\aleph$:

$$\aleph\left\{\frac{\partial f^{(N)}(\overline{a},\overline{a}^+)}{\partial x}\right\} = \aleph\left\{\overline{a}^+\left[f^{(N)}(\overline{a},\overline{a}^+)\overline{a} + \frac{\partial f^{(N)}(\overline{a},\overline{a}^+)}{\partial \overline{a}^+}\right]\right\} \tag{4}$$

Можна тимчасово опустити позначку оператора $\aleph$, а отже, й індекс $^{(N)}$, і розглядати одержане з (4) співвідношення як диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial f(\overline{a},\overline{a}^+)}{\partial x} - \overline{a}^+\frac{\partial f(\overline{a},\overline{a}^+)}{\partial \overline{a}^+} = \overline{a}^+\overline{a}f(\overline{a},\overline{a}^+), \tag{5}$$

в якому x, $\overline{a}$, $\overline{a}^+$ є звичайними (не операторними) величинами. Коли розв'яжемо рівняння (5), то явний вигляд $f^{(N)}(a,a^+)$ можна буде легко встановити, діючи оператором $\aleph$ на $f(\overline{a},\overline{a}^+)$. Знаходження розв'язку значно спрощується, якщо зробити такі заміни змінних:

$$\begin{aligned} x + \ln\overline{a}^+ &= \xi, \qquad & x &= \frac{1}{2}(\xi+\eta) \\ x - \ln\overline{a}^+ &= \eta, \qquad & \overline{a}^+ &= e^{(\xi-\eta)/2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi}+\frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \bar{a}^{+}\frac{\partial}{\partial \bar{a}^{+}}=\frac{\partial}{\partial \xi}-\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{7}$$

У нових змінних рівняння (5) набуває вигляду:

$$2\frac{\partial f}{\partial \eta}=\bar{a}e^{(\xi-\eta)/2}f\,. \tag{8}$$

Воно має такий розв'язок:

$$2\ln f=-2\bar{a}e^{(\xi-\eta)/2}+g(\xi)\,. \tag{9}$$

Невідому функцію $g(\xi)$ (постійну інтегрування), можна знайти, врахувавши, що якщо $x=0$, то $\xi=-\eta$, $f(x=0)=1$.

Тоді з (9) одержимо:

$$g(\xi)=2\bar{a}e^{\xi}\,. \tag{10}$$

Підставивши (10) у (9), одержимо:

$$f(\bar{a},\bar{a}^{+})=\exp\left\{\left(e^{x}-1\right)\bar{a}^{+}\bar{a}\right\}. \tag{11}$$

Представляючи вираз (11) у вигляді розкладу по степенях величини у фігурних дужках і діючи після цього на обидві частини рівності оператором $\aleph$, одержимо остаточний вираз:

$$e^{xa^{+}a}=\aleph\left\{\exp\left[\left(e^{x}-1\right)\bar{a}^{+}\bar{a}\right]\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(e^{x}-1\right)^{n}}{n!}a^{+n}a^{n}. \tag{12}$$

7. Довести, що оператор $\hat{\sigma}_{\pm}(t)$, заданий у представленні Гайзенберґа $\hat{\sigma}_{\pm}(t)\equiv e^{\frac{i}{\hbar}H_a t}\hat{\sigma}_{\pm}e^{-\frac{i}{\hbar}H_a t}$, дорівнює $e^{\mp i\omega_a t}\hat{\sigma}_{\pm}(0)$.

Гамільтоніан H_a задається виразом (7.46).

Вказівка.

Можна використати теорему про операторний розклад та тотожності (7.52) (третій рядок).

8. Довести, що справджується співвідношення

$$e^{\xi\hat{\sigma}_z+\eta\hat{\sigma}_x}=ch\sqrt{\xi^2+\eta^2}+\frac{sh\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}(\xi\hat{\sigma}_z+\eta\hat{\sigma}_x)\,. \tag{1}$$

Розв'язок.

Запишемо експоненту в лівій частині у вигляді ряду:

$$e^{\xi\hat{\sigma}_z+\eta\hat{\sigma}_x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi\hat{\sigma}_z+\eta\hat{\sigma}_x)^n}{n!}. \tag{2}$$

Для парних значень n ($n=2k$) одержуємо:

$$(\xi\hat{\sigma}_z+\eta\hat{\sigma}_x)^{2k}=(\xi^2+\eta^2)^k\,. \tag{3}$$

Тоді для непарних n ($n=2k+1$) матимемо:

$$(\xi\hat{\sigma}_z+\eta\hat{\sigma}_x)^{2k+1}=(\xi^2+\eta^2)^k(\xi\hat{\sigma}_z+\eta\hat{\sigma}_x)\,. \tag{4}$$

Під час обчислення правих частин (3), (4) ми врахували, що $\hat{\sigma}_z^2=\hat{\sigma}_x^2=1$ та $\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x+\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z=0$.

Підставляючи вирази (3), (4) у розклад експоненти (2), легко одержимо співвідношення (1).

9. Так само, як і в задачі (**8**), довести тотожність

$$e^{\xi\hat{\sigma}_{+}+\eta\hat{\sigma}_{-}}=ch\sqrt{\xi\eta}+\frac{sh\sqrt{\xi\eta}}{\sqrt{\xi\eta}}(\xi\hat{\sigma}_{+}+\eta\hat{\sigma}_{-})\,.$$

Вказівка.

Використати такі властивості операторів $\hat{\sigma}_{\pm}$:

$$\hat{\sigma}_{+}^2=\hat{\sigma}_{-}^2=0 \quad \text{та} \quad \hat{\sigma}_{+}\hat{\sigma}_{-}+\hat{\sigma}_{-}\hat{\sigma}_{+}=1\,.$$

8. Когерентні стани електромагнітного поля

Класичне електромагнітне поле зручно описувати за допомогою комплексної амплітуди. Такий опис містить у собі інформацію і про амплітуду, і про фазу електромагнітних коливань. Зручність полягає в тому, що, зазвичай, саме фаза визначає когерентні властивості світлових хвиль, їх просторову та часову кореляцію. У цьому ми пересвідчились на конкретних прикладах, описуючи властивості світла з позиції і класичної (розділ 1), і квантової теорії (розділи 5, 6).

Динаміка квантових систем а також методи її опису дуже подібні до класичних тоді, коли світло перебуває в так званому когерентному стані. Властивості когерентних станів схожі з властивостями станів лазерного випромінювання чи випромінювання параметричних осциляторів. Когерентні стани вперше були описані Шредінгером (1926) під час вивчення квантового гармонічного осцилятора і визначались ним як стани, за яких невизначеність канонічних змінних (координати та імпульсу) є мінімальною. Ці та інші важливі властивості когерентних станів розглядаються в цьому розділі. Зокрема буде показано, що когерентні стани можна використовувати як базисні під час розв'язку багатьох практичних задач. Розуміння того, що когерентні стани можуть стати основою математичного апарату квантової оптики, з'явилось після публікацій праць Глаубера 1963 року. Саме Рой Глаубер, нобелівський лауреат (2005) у галузі квантової оптики, ввів термін "когерентні стани".

8.1. Фоківське представлення когерентних станів

Знову розглядатимемо лише одну моду (наприклад, $\vec{k}, s$ моду) електромагнітного поля. Тому далі опускатимемо індекси, що ідентифікують її.

Формально когерентні стани визначаються як власні (праві) функції оператора знищення a. Далі ми покажемо, що такі стани справді існують, і знайдемо їхній явний вигляд у фоківському представленні.

Якщо є якась власна функція оператора a (стан $|\nu\rangle$), то для неї виконується умова

$$a|v\rangle = v|v\rangle, \tag{8.1}$$

де літерою v ми позначаємо і власне значення, і власну функцію, що відповідає цьому власному значенню. Оскільки оператор a не є самоспряженим ($a^+ \neq a$), то в загальному випадку v є комплексним числом. Отже, коли поле знаходиться в когерентному стані, то воно характеризується двома величинами: модулем $|v|$ і аргументом v. Це дуже схоже до класичного опису за допомогою амплітуди та фази хвилі.

Застосовуючи до обох частин рівняння (8.1) операцію ермітового спряження

$$\left(a|v\rangle\right)^+ = \left(v|v\rangle\right)^+ = \langle v|v^* = \langle v|a^+,$$

одержимо умову існування "лівої" власної функції оператора a^+, яка аналогічна до рівняння (8.1):

$$\langle v|a^+ = \langle v|v^*. \tag{8.2}$$

Очевидно, що когерентні стани можна виразити через фоківські стани, оскільки останні утворюють повну систему:

$$|v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle . \tag{8.3}$$

Підставивши (8.3) у рівняння (8.1), одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = v \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle , \tag{8.4}$$

де використане співвідношення (2.63). Функції $|n\rangle$ взаємно ортогональні. Тоді коефіцієнти біля однакових базисних функцій у правій і лівій частинах рівняння (8.4) мають бути однаковими. З цієї умови одержуємо рекурентні співвідношення між сусідніми значеннями c_n:

$$c_n = \frac{v}{\sqrt{n}} c_{n-1} . \tag{8.5}$$

Послідовно повторюючи цю процедуру, можна виразити всі коефіцієнти c_n через значення c_0:

$$c_n = \frac{v^2}{\sqrt{n(n-1)}} c_{n-2} = ... = \frac{v^n}{\sqrt{n!}} c_0 . \tag{8.6}$$

Отже, можна записати

$$|v\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \tag{8.7}$$

Постійна c_0 задається умовою нормування

$$\langle v|v\rangle = 1 = |c_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|v^2|^n}{n!} = |c_0|^2 e^{|v|^2} , \tag{8.8}$$

звідки одержуємо:

$$|c_0| = e^{-|v|^2/2} .$$

Отже, вираз для хвильової функції когерентного стану у фоківському представленні має вигляд:

$$|v\rangle = e^{-|v|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \tag{8.9}$$

Комплексно спряжена хвильова функція дорівнює:

$$\langle v| = e^{-|v|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n| . \tag{8.10}$$

Проекція $|v\rangle$ на фоківський стан $|n\rangle$ визначається скалярним добутком

$$\langle n|v\rangle = \frac{v^n}{\sqrt{n!}} e^{-|v|^2/2} . \tag{8.11}$$

За відомою інтерпретацією хвильової функції ймовірність того, що система перебуває в n -фотонному стані, задається виразом:

$$P(n) = |\langle n|v\rangle|^2 = \frac{|v|^{2n}}{n!} e^{-|v|^2} . \tag{8.12}$$

Цю формулу можна розглядати як розподіл Пуассона для випадкової величини n , середнє значення якої дорівнює $|v|^2$. Справді, за означенням, середнє $\overline{n}$ дорівнює:

$$\overline{n} = \sum_{n=o}^{\infty} nP(n) = e^{-|v|^2} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{|v|^{2n}}{n!} = |v|^2 . \tag{8.13}$$

Такий же вираз одержимо, розглядаючи середнє значення оператора $\hat{n}$ у стані $|v\rangle$:

$$\langle v|\hat{n}|v\rangle = \langle v|a^+ a|v\rangle = |v|^2 = \overline{n} , \tag{8.14}$$

де використані формули (8.1) і (8.2).

Середньоквадратичні флуктуації кількості фотонів у стані $|v\rangle$ знайдемо за аналогією з попередньою формулою:

$$\langle \delta n^2 \rangle = \langle (\hat{n}-\overline{n})^2 \rangle = \langle \hat{n}\hat{n} \rangle - \overline{n}^2 = \langle a^+a^+aa \rangle + \overline{n} - \overline{n}^2 . \quad (8.15)$$

Знову, використовуючи рівняння (8.1), легко знаходимо

$$\langle v | a^+a^+aa | v \rangle = |v|^4 . \quad (8.16)$$

Підставивши (8.16) у (8.15), одержимо

$$\langle \delta n^2 \rangle = |v|^4 + \overline{n} - |v|^4 = \overline{n} , \quad (8.17)$$

як і має бути при пуассонівській статистиці флуктуацій кількості фотонів. Для порівняння нагадаємо результат, одержаний раніше для теплового випромінювання (розділ 2, рівняння (2.79):

$$\langle \delta n^2 \rangle = \overline{n}^2 + \overline{n} \text{ , де } \overline{n} = n_P .$$

Як бачимо, середньоквадратичні флуктуації кількості фотонів у когерентному стані завжди менші, ніж у теплового випромінювання. Проте вони стають близькими за величиною, коли $\overline{n} << 1$.

На завершення параграфу відзначимо таке. З рівняння (8.1) видно, що когерентний стан не змінюється після дії на нього оператора знищення a. Зазвичай, саме оператори знищення описують взаємодію поля з вимірювальними пристроями, наприклад, з детекторами. За такого способу вимірювання існує значна подібність з класичним випадком. У класичних системах збурення поля, що виникають під час вимірювань, також можна зробити неістотними, зменшуючи кількість фотонів, що взаємодіють з вимірювальним приладом. Це можна зробити внаслідок великої кількості фотонів у класичних системах.

8.2. Когерентний стан як зсунутий вакуумний стан. Оператор зсуву

Формула (8.9) показує зв'язок між когерентними та фоківськими станами. Останні виражаються через вакуумний стан (рівн. (2.67)) як $|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$. Тоді вираз (8.9) можна записати у такому вигляді:

$$|v\rangle = e^{-|v|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(va^+)^n}{n!} |0\rangle = e^{-|v|^2/2} e^{va^+} |0\rangle . \quad (8.18)$$

Отже, когерентний стан утворюється дією оператора e^{va^+} на вакуумний стан. Праву частину рівняння (8.18) можна записати у більш симетричному вигляді. Для цього між множниками e^{va^+} та $|0\rangle$ вставимо оператор e^{-v^*a}, оскільки цей оператор не змінює вакуумного стану ($e^{-v^*a}|0\rangle = |0\rangle$). Тоді замість (8.18) матимемо:

$$|v\rangle = e^{-|v|^2/2} e^{va^+} e^{-v^*a} |0\rangle . \quad (8.19)$$

Використовуючи теорему Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа, (8.19) можна переписати у компактнішому вигляді:

$$|v\rangle = D(v)|0\rangle , \quad (8.20)$$

де оператор $D(v)$, який називається оператором зсуву, задається виразом

$$D(v) = e^{va^+ - v^*a} . \quad (8.21)$$

Формула (8.20) показує, що оператор $D(v)$ генерує з вакууму когерентний стан $|v\rangle$. Тут фізична картина майже така ж, як і у випадку дії оператора $\left(a^{+}\right)^{n}$ на вакуум з утворенням фоківського n-фотонного стану (див. рівняння (2.67)).

Оператор $D(v)$ є унітарним, оскільки

$$D^{+}(v)=D(-v)=D^{-1}(v), \qquad (8.22)$$

тобто для нього виконується умова унітарності $D^{+}=D^{-1}$.

8.3. Властивості оператора зсуву

Укажемо на деякі важливі властивості оператора зсуву.

(а) Унітарне перетворення операторів народження та знищення a, a^{+} з використанням оператора $D(v)$ зводиться лише до операції додавання (тобто зсуву) до них величин v та v^{*}, відповідно:

$$D^{+}(v)aD(v)=a+v; \quad D^{+}(v)a^{+}D(v)=a^{+}+v^{*}. \qquad (8.23)$$

Ці співвідношення вже були одержані у попередньому розділі (див. рівняння (7.8)).

(б) Для будь-якої функції $f(a,a^{+})$, яку можна розкласти в ряд Тейлора, виконується рівність:

$$D^{+}(v)f(a,a^{+})D(v)=f(a+v,a^{+}+v^{*}). \qquad (8.24)$$

Вона є очевидною, оскільки після перетворення подібності оператори a та a^{+} замінюються "зсунутими" значеннями ($a+v$) та ($a^{+}+v^{*}$) (див. вирази (8.23)).

(в) Добуток двох операторів $D(v)D(v')$ є (з точністю до фазового множника) оператором зсуву на величину $v+v'$.

Для доведення цього твердження запишемо у явному вигляді добуток операторів:

$$D(v)D(v')=e^{va^{+}-v^{*}a}e^{v'a^{+}-v'^{*}a}. \qquad (8.25)$$

Використання теореми Кемпбела–Бейкера–Хаусдорфа дає змогу записати праву частину (8.25) у вигляді $e^{(v+v')a^{+}-(v^{*}+v'^{*})a}e^{\frac{1}{2}(vv'^{*}-v^{*}v')}$, оскільки комутатор

$$\left[va^{+}-v^{*}a, v'a^{+}-v'^{*}a\right] \qquad (8.26)$$

дорівнює $vv'^{*}-v^{*}v'$, тобто є c-числом.

Тоді

$$D(v)D(v')=e^{\frac{1}{2}(vv'^{*}-v^{*}v')}D(v+v'), \qquad (8.27)$$

де комплексне число $vv'^{*}-v^{*}v'$ має тільки уявну складову.

(г) Наслідком формули (8.27) є ще одна важлива властивість операторів зсуву, що діють на когерентний стан:

$$D(v)\left|v'\right\rangle=D(v)D(v')\left|0\right\rangle=e^{\frac{1}{2}(vv'^{*}-v^{*}v')}D(v+v')\left|0\right\rangle. \qquad (8.28)$$

(д) Два оператори $D(v)$ та $D(v')$ є "ортогональними" у тому розумінні, що

$$sp\left[D(v)D(v')\right]=\pi\delta^{2}(v+v') \qquad (8.29)$$

(див. задачу **8** цього розділу), де використане позначення $\delta^{2}(z)\equiv\delta\left(\operatorname{Re}z\right)\delta\left(\operatorname{Im}z\right)$, z – довільне комплексне число.

8.4. q- представлення когерентних станів

У цьому параграфі повернемося до змінних $\hat{q},\hat{p}$, через які визначались у другому розділі оператори народження та знищення a,a^{+} (рівняння (2.31)). Припустивши, що "маса” m_n дорівнює одиниці та внісши експоненціальний множник $e^{-i\omega t}$ у визначення оператора a, одержимо

$$a = \frac{\omega\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}}. \qquad (8.30)$$

Проекцію функції $|v\rangle$ на координатний базис $\psi_v(q) \equiv \langle q|v\rangle$, тобто хвильову функцію Шредінгера, можна знайти, домноживши зліва обидві частини рівняння $a|v\rangle = v|v\rangle$ на вектор стану $\langle q|$. Матричні елементи операторів $\hat{q}$ і $\hat{p}$ дорівнюють:

$$\langle q|\hat{q}|v\rangle = \left(\hat{q}|q\rangle\right)^{+}|v\rangle = q\langle q|v\rangle,$$

$$\langle q|\hat{p}|v\rangle = \int dp\langle q|p\rangle\langle p|\hat{p}|v\rangle =$$

$$= \int dpp\langle q|p\rangle\langle p|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dppe^{ipq/\hbar}\langle p|v\rangle =$$

$$= -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\int dp\langle q|p\rangle\langle p|v\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q|v\rangle. \qquad (8.31)$$

Під час одержання першої рівності враховано, що $\hat{q}$ є самоспряженим оператором ($\hat{q}^{+} = \hat{q}$). Щоб одержати другу рівність, ми помножили $\hat{p}$ зліва на одиничний оператор $\int dp|p\rangle\langle p|$, де $|p\rangle$ – вектор стану в імпульсному просторі і врахували, що власна функція оператора імпульсу в координатному представленні $\langle q|p\rangle$ дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipq/\hbar}$. Використовуючи обидва співвідношення (8.31), одержимо рівняння для функції $\psi_v(q)$. Воно має вигляд:

$$\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}}q + \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\partial_q\right)\psi_v(q) = v\psi_v(q). \qquad (8.32)$$

Розв’язок рівняння (8.32) можна легко знайти і він має вигляд:

$$\psi_v(q) = Cexp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}q^2 + v\sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}}q\right\} =$$

$$= Ce^{v^2}exp\left\{-\frac{\omega}{2\hbar}\left(q - \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}v\right)^2\right\}. \qquad (8.33)$$

Константу C визначають умовою нормування $\int dq|\psi_v(q)|^2 = 1$ і вона дорівнює:

$$C = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left\{\left(\mathrm{Im}\, v\right)^2\right\}. \qquad (8.34)$$

З рівняння (8.33) видно, що $\psi_v(q)$ має форму гауссового розподілу в координатному просторі, зсунутого відносно точки $q = 0$ на комплексну відстань $\sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}v$. При $v = 0$, тобто у вакуумному стані, такий зсув відсутній. Це знову дає змогу говорити про когерентний стан як про зсунутий вакуумний стан.

Координатне представлення хвильової функції когерентного стану має переваги у тих випадках, коли замість динамічних змінних a, a^{+} використовують оператори координати та імпульсу $\hat{q}$ і $\hat{p}$, власні значення яких утворюють фазовий простір.

8.5. Зміна з часом когерентних станів. Співвідношення невизначеностей

Якщо гамільтоніан системи явно не залежить від часу, то в представленні Шредінгера залежність хвильових функцій від часу визначається оператором еволюції $\exp\{-i\mathrm{H}t/\hbar\}$:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \exp\{-i\mathrm{H}t/\hbar\}\left|\psi(0)\right\rangle \equiv U(t)\left|\psi(0)\right\rangle. \qquad (8.35)$$

Коли $\left|\psi(0)\right\rangle$ є власною функцією гамільтоніана H з власним значенням ε_n, то оператор $U(t)$ у рівнянні (8.35) замінюється на фазовий множник $\exp\{-i\varepsilon_n t/\hbar\}$, де $\varepsilon_n = \mathrm{const}$.

Отже, у цьому випадку $\left|\psi(t)\right\rangle = \exp\{-i\varepsilon_n t/\hbar\}\left|\psi(0)\right\rangle$. Коли ж початкове значення $\left|\psi(0)\right\rangle$ не є власною функцією гамільтоніана, як, наприклад, когерентний стан $\left|v\right\rangle$, то залежність хвильової функції від часу значно складніша.

Розглянемо саме цей випадок.

Нехай $\left|\psi(0)\right\rangle = \left|v\right\rangle$. Тоді, враховуючи явний вигляд гамільтоніана фотонів у вакуумі (2.52), одержимо таку залежність хвильової функції від часу:

$$\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-it\omega\hat{n}}\left|v\right\rangle =$$

$$= e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-it\omega\hat{n}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|v|^2/2} \frac{v^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle =$$

$$= e^{-i\frac{\omega}{2}t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|v|^2/2} \frac{e^{-it\omega n} v^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t}\left|v(t)\right\rangle, \qquad (8.36)$$

де $\left|v(t)\right\rangle$ – когерентний стан, власне значення якого залежить від часу: $v(t) = ve^{-i\omega t}$.

Легко переконатись, що значення енергії в такому стані не залежить від часу:

$$\left\langle v(t)\right|\mathrm{H}\left|v(t)\right\rangle = \hbar\omega\left(\left|v(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\left|v\right|^2 + \frac{1}{2}\right).$$

Можна дещо простішим способом знайти залежність когерентного стану від часу. Для цього досить подіяти оператором a на хвильову функцію:

$$a\left|\psi(t)\right\rangle = aU\left|v\right\rangle = UU^{-1}aU\left|v\right\rangle =$$

$$= e^{-i\omega t}Ua\left|v\right\rangle = e^{-i\omega t}vU\left|v\right\rangle. \qquad (8.37)$$

Тут ми використали формулу (7.11):

$$U^{-1}aU = e^{-i\omega t}a = a(t). \qquad (8.38)$$

З (8.37) випливає, що $a\left|\psi(t)\right\rangle = e^{-i\omega t}v\left|\psi(t)\right\rangle$. Отже, функція $\left|\psi(t)\right\rangle = U\left|v\right\rangle = \left|v(t)\right\rangle$ є власною функцією оператора a (тобто є когерентним станом), що відповідає власному значенню $v(t) = ve^{-i\omega t}$.

З (8.38) легко побачити, що

$$\left\langle v(t)\right|a\left|v(t)\right\rangle = \left\langle v\right|a(t)\left|v\right\rangle = ve^{-i\omega t},$$

$$\left\langle v(t)\right|a^+\left|v(t)\right\rangle = \left\langle v\right|a^+(t)\left|v\right\rangle = v^* e^{i\omega t}. \qquad (8.39)$$

Знаючи середні значення $a(t), a^+(t)$ у когерентному стані, можна знайти такі ж середні для координати та імпульсу:

$$\left\langle \hat{q}(t)\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left\langle a^+(t) + a(t)\right\rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\left(v^* e^{i\omega t} + ve^{-i\omega t}\right) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\left|v\right|\cos(\omega t - \varphi), \qquad (8.40)$$

де φ – аргумент комплексного числа v ($v = \left|v\right|e^{i\varphi}$).

Середнє значення імпульсу квантового осцилятора в момент часу t дорівнює:

$$\langle \hat{p}(t) \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \langle a^+(t) - a(t) \rangle =$$
$$= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left(v^* e^{i\omega t} - v e^{-i\omega t} \right) = -\sqrt{2\hbar\omega} |v| \sin(\omega t - \varphi). \quad (8.41)$$

Отже, в когерентному стані

$$\langle \hat{q}(t) \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} |v| \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\langle \hat{p}(t) \rangle = -\sqrt{2\hbar\omega} |v| \sin(\omega t - \varphi). \quad (8.42)$$

Як бачимо, рівняння (8.42) нічим не відрізняються від класичних рівнянь руху гармонічного осцилятора. Саме про таку властивість когерентних станів йшлося на початку цього розділу. Проте, як і в розділі 5, середньоквадратичні флуктуації істотно відрізняються від класичних значень. Для знаходження середньоквадратичних відхилень координати та імпульсу від середніх значень використаємо величини $\langle \hat{q}(t) \rangle$ та $\langle \hat{p}(t) \rangle$, задані виразами (8.42). А середні значення $\langle \hat{q}^2(t) \rangle$ та $\langle \hat{p}^2(t) \rangle$ дорівнюють:

$$\langle \hat{q}^2(t) \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \left\langle \left(a^+(t) + a(t) \right)^2 \right\rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2\omega} \langle v | \left(a^+ a^+ + aa + 2a^+ a + 1 \right)_t | v \rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2\omega} \left(v^{*2}(t) + v^2(t) + 2|v|^2 + 1 \right) =$$

$$= \frac{\hbar |v|^2}{2\omega} \left(e^{i2(\omega t - \varphi)} + e^{-i2(\omega t - \varphi)} + 2 \right) + \frac{\hbar}{2\omega} =$$

$$= \frac{\hbar}{2\omega} \left[4|v|^2 cos^2(\omega t - \varphi) + 1 \right]; \quad (8.43)$$

$$\langle \hat{p}^2(t) \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2} \left\langle \left(a^+(t) - a(t) \right)^2 \right\rangle =$$
$$= -\frac{\hbar\omega}{2} \langle v | \left(a^+ a^+ + aa - 2a^+ a - 1 \right)_t | v \rangle =$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} \left[4|v|^2 \sin^2(\omega t - \varphi) + 1 \right]. \quad (8.44)$$

Отже,

$$\langle \delta q^2 \rangle = \left\langle \left(\hat{q}(t) - \overline{\hat{q}(t)} \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{q}^2(t) \rangle - \overline{\hat{q}(t)}^2 = \frac{\hbar}{2\omega} \cdot \quad (8.45)$$

$$\langle \delta p^2 \rangle = \langle \hat{p}^2(t) \rangle - \overline{\hat{p}}^2(t) = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (8.46)$$

Очевидно, що мірою невизначеності координати є величина $\Delta q = \langle \delta q^2 \rangle^{1/2}$, а імпульсу – величина $\Delta p = \langle \delta p^2 \rangle^{1/2}$.

Тоді добуток невизначеностей дорівнює

$$\Delta q \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2} \cdot \quad (8.47)$$

Одним з найважливіших результатів квантової механіки є принцип невизначеності, за яким добуток невизначеностей двох канонічно спряжених величин (а саме такими є координата та імпульс) має задовольняти нерівність $\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar / 2$. Рівняння (8.47) показує, що добуток невизначеностей координати та імпульсу в когерентному стані осцилятора є мінімально можливим. Це знову свідчить про максимальну наближеність когерентних станів до класичних.

8.6. Стани з мінімальною невизначеністю

Висока точність вимірювання фізичних величин має велике практичне значення. Проте, як показано на прикладі гармонічного осцилятора, ця точність може обмежуватись на фундаментальному рівні квантово-механічною невизначеністю. Зокрема невизначеності координати та імпульсу гармонічного осцилятора в когерентному стані є фіксованими величинами:

$$\Delta q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \quad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}.$$

Існують інші стани світла з мінімальною невизначеністю добутку дисперсій координати та імпульсу. Невизначеність кожної з цих величин залежить від стану системи. Було показано, що невизначеність однієї з них може бути меншою, ніж у когерентному стані. Звичайно, при цьому автоматично зростає невизначеність іншої величини. Такі стани належать до класу так званих стиснених станів.

Для ілюстрації розглянемо конкретний приклад.

Нехай оператор

$$U(\theta) = e^{\theta(a^2 - a^{+2})/2} \tag{8.48}$$

(θ – дійсне число) діє на когерентний стан:

$$U(\theta)|v\rangle \equiv |v,\theta\rangle. \tag{8.49}$$

$U(\theta)$ є унітарним оператором, оскільки $U^{+}(\theta) = U^{-1}(\theta)$. Тому новий стан $|v,\theta\rangle$ є нормованим на одиницю (як і стан $|v\rangle$). Знайдемо невизначеності координати та імпульсу в стані $|v,\theta\rangle$ і покажемо, що їхній добуток також є мінімальним. Для цього нам потрібні будуть вирази для модифікованих операторів $a(\theta), a^{+}(\theta)$, заданих унітарним перетворенням:

$$a(\theta) = U^{+}aU; \quad a^{+}(\theta) = U^{+}a^{+}U. \tag{8.50}$$

Враховуючи явний вигляд операторів U та U^{+}, вирази (8.50) можна істотно спростити. Для цього знайдемо похідні від операторів $a(\theta), a^{+}(\theta)$ по θ:

$$\frac{\partial a(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{2}U^{+}\left[a^{+2}, a\right]U = -a^{+}(\theta)$$

$$\frac{\partial a^{+}(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}U^{+}\left[a^{2}, a^{+}\right]U = -a(\theta). \tag{8.51}$$

Рівняння (8.51) можна легко розв’язати. Шляхом почленного додавання та віднімання лівих та правих частин (8.51) одержимо:

$$\frac{\partial\left(a(\theta) + a^{+}(\theta)\right)}{\partial\theta} = -\left(a(\theta) + a^{+}(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial\left(a(\theta) - a^{+}(\theta)\right)}{\partial\theta} = \left(a(\theta) - a^{+}(\theta)\right) \quad . \tag{8.52}$$

Розв’язками рівнянь (8.52) є функції:

$$a(\theta) + a^{+}(\theta) = \left(a + a^{+}\right)e^{-\theta},$$

$$a(\theta) - a^{+}(\theta) = \left(a - a^{+}\right)e^{\theta}, \tag{8.53}$$

які задовольняють рівняння (8.52) та очевидні початкові умови:

$$a(\theta = 0) = a, \quad a^{+}(\theta = 0) = a^{+}. \tag{8.54}$$

Тепер для знаходження середніх значень координати та імпульсу в стані $|v,\theta\rangle$ скористаємось виразами (8.40) і (8.41):

$$\langle\hat{q}\rangle = \langle\theta, v|\hat{q}|v,\theta\rangle = \langle v|U^{+}(\theta)\hat{q}U(\theta)|v\rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle v | a^+(\theta) + a(\theta) | v \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} e^{-\theta} \left(v + v^* \right).$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \theta, v | \hat{p} | v, \theta \rangle = \langle v | U^+(\theta) \hat{p} U(\theta) | v \rangle =$$

$$= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \langle v | \left(a^+(\theta) - a(\theta) \right) | v \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} e^{\theta} \left(v^* - v \right), \quad (8.55)$$

де використано розв'язки (8.53).

Аналогічно знайдемо середньоквадратичні значення координати та імпульсу:

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \langle v | U^+(\theta) \left(a^+ + a \right)^2 U(\theta) | v \rangle = \\ = \frac{\hbar}{2\omega} e^{-2\theta} \left[\left(v + v^* \right)^2 + 1 \right]$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2} \langle v | U^+(\theta) \left(a^+ - a \right)^2 U(\theta) | v \rangle = \\ = -\frac{\hbar\omega}{2} e^{2\theta} \left[\left(v - v^* \right)^2 - 1 \right] \quad . \quad (8.56)$$

Тоді $$\langle \delta\hat{q}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} e^{-2\theta}; \quad \langle \delta\hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} e^{2\theta}. \quad (8.57)$$

Як бачимо, невизначеності обох величин залежать від параметра θ. Якщо, наприклад, $\theta >> 1$, то невизначеність координати буде мала, а невизначеність імпульсу стає велика. Водночас, добуток невизначеностей є таким самим, як і в когерентному стані: $\Delta q \cdot \Delta p = \hbar / 2$, тобто мінімальним.

Результати цього параграфа досить специфічні, оскільки на відміну від попереднього розгляду ми не враховували можливу еволюцію стану $|v, \theta\rangle$. Якщо динаміка електромагнітного поля визначається гамільтоніаном невзаємодіючих фотонів (як і раніше), то невизначеності істотно змінюються внаслідок залежності хвильової функції від часу. Опускаючи деталі обчислень, які здійснюються за такою ж схемою, що і в попередньому параграфі, можна знайти

$$\langle \delta q^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\omega} \left(ch2\theta - sh2\theta \cos 2\omega t \right)$$

$$\langle \delta p^2 \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left(ch2\theta + sh2\theta \cos 2\omega t \right). \quad (8.58)$$

Формули (8.58) зводяться до попередніх (8.57), якщо $t = 0$. Також легко побачити, що добуток невизначеностей є осцилюючою в часі функцією:

$$\langle \delta q^2 \rangle \cdot \langle \delta p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \left(ch^2 2\theta - sh^2 2\theta \cos^2 2\omega t \right). \quad (8.59)$$

Невизначеність добутку є мінімальною лише в певні моменти часу:

$$t = t_n = \pi n / 2\omega,$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

8.7. Квантові та класичні невизначеності

Невизначеності, розраховані в попередніх параграфах, мають суто квантову природу, бо в граничному випадку $\hbar \to 0$ вони зникають. Співвідношення Гайзенберга у випадку канонічно спряжених змінних $\hat{q}$, $\hat{p}$

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (8.60)$$

встановлює лише нижню межу невизначеності, тоді як у багатьох випадках вона може бути значно більшою. Отже, є сенс одержати загальніше, ніж (8.60) співвідношення і з'ясувати природу невизначеності.

Нехай є два оператори δx та δy, що описують відхилення фізичних величин від їх середніх значень:

$$\delta x = x - \langle x \rangle, \quad \delta y = y - \langle y \rangle.$$

Можна показати, що для будь-якого оператора A, у якого є ермітово спряжений оператор A^+, завжди виконується нерівність

$$\left\langle AA^+ \right\rangle \geq 0 \tag{8.61}$$

для будь-якого квантового стану системи, оскільки

$$\left\langle AA^+ \right\rangle = \int dX \psi^*(X) AA^+ \psi(X) = \int dX \left(A^+\psi(X) \right)^* A^+\psi(X) = \int dX \left| A^+\psi(X) \right|^2 \geq 0,$$

де $\psi(X)$ – хвильова функція, задана в X-представленні.

Нерівність (8.61) використаємо для одержання загальнішого, ніж (8.60) співвідношення. Нехай оператор A має вигляд:

$$A = \delta x + \lambda e^{i\theta} \delta y, \ \theta = \theta^*, \ \lambda = \lambda^*. \tag{8.62}$$

Тоді

$$\left\langle \left(\delta x + \lambda e^{i\theta} \delta y \right) \left(\delta x + \lambda e^{-i\theta} \delta y \right) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \delta x^2 \right\rangle + \lambda \left\langle \delta y \delta x e^{i\theta} + \delta x \delta y e^{-i\theta} \right\rangle + \lambda^2 \left\langle \delta y^2 \right\rangle =$$
$$= \left\langle \delta x^2 \right\rangle + \lambda \left\langle cos\theta \left[\delta x, \delta y \right]_+ - i \sin\theta \left[\delta x, \delta y \right] \right\rangle + \lambda^2 \left\langle \delta y^2 \right\rangle =$$
$$= \left\langle \delta y^2 \right\rangle \left[\frac{\left\langle \delta x^2 \right\rangle}{\left\langle \delta y^2 \right\rangle} + \left(\lambda + \frac{< \ldots >}{2\left\langle \delta y^2 \right\rangle} \right)^2 - \frac{< \ldots >^2}{4\left\langle \delta y^2 \right\rangle^2} \right] \geq 0, \tag{8.63}$$

де $\left[\delta x, \delta y \right]_+ = \delta x \delta y + \delta y \delta x$; символом $< \ldots >$ ми позначили коефіцієнт при λ у другому рядку (8.63).

Нерівність (8.63) виконується за будь-яких значень параметра λ. Нехай $\lambda = -\frac{< \ldots >}{2\left\langle \delta y^2 \right\rangle}$. Тоді член у круглих дужках останнього рядка зникає. Після цього нерівність спрощується і її можна записати у вигляді:

$$\left\langle \delta x^2 \right\rangle \left\langle \delta y^2 \right\rangle \geq \frac{< \ldots >^2}{4}. \tag{8.64}$$

Ввівши нові позначення, вираз $< \ldots >^2$ можна переписати як

$$< \ldots >^2 = \left(\cos\theta \left\langle \left[\delta x, \delta y \right]_+ \right\rangle - i \sin\theta \left\langle \left[\delta x, \delta y \right] \right\rangle \right)^2 \equiv$$
$$\equiv \left(\cos\theta a - \sin\theta b \right)^2 =$$
$$= (a^2 + b^2) \left(\cos\theta \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \sin\theta \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2, \tag{8.65}$$

де $a = \left\langle \left[\delta x, \delta y \right]_+ \right\rangle, \quad b = i \left\langle \left[\delta x, \delta y \right] \right\rangle.$

Легко побачити, що b (як і a) є дійсною величиною, оскільки

$$\left\langle \psi \left| \left[\delta x, \delta y \right] \right| \psi \right\rangle^* = \left\langle \psi \left| \left[\delta x, \delta y \right]^+ \right| \psi \right\rangle = -\left\langle \psi \left| \left[\delta x, \delta y \right] \right| \psi \right\rangle. \tag{8.66}$$

Тут враховано, що $x = x^+, \ \ y = y^+$.

Отже, можна зробити заміни

$$\cos\alpha \equiv \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\alpha \equiv \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

і тоді останній вираз у (8.65) зводиться до

$$(a^2 + b^2) \cos^2(\theta + \alpha). \tag{8.67}$$

З врахуванням (8.67) нерівність (8.64) набуває вигляду:

$$\left\langle \delta x^2 \right\rangle \left\langle \delta y^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4}(a^2+b^2)\cos^2(\theta+\alpha). \tag{8.68}$$

Нерівність (8.68) має виконуватись за будь-яких значень α, зокрема, й коли $\alpha = -\theta$. У цьому випадку одержимо:

$$\left\langle \delta x^2 \right\rangle \left\langle \delta y^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4}\left\{ \left\langle i[\delta x, \delta y] \right\rangle^2 + \left\langle [\delta x, \delta y]_+ \right\rangle^2 \right\}. \tag{8.69}$$

Для канонічно спряжених величин $i[\delta x, \delta y] = \pm\hbar$. Тоді

$$\left\langle \delta x \right\rangle^2 \left\langle \delta y \right\rangle^2 \geq \frac{1}{4}\left\{ \hbar^2 + \left\langle [\delta x, \delta y]_+ \right\rangle^2 \right\}. \tag{8.70}$$

Права частина досягає найменшого значення, коли другий член у фігурних дужках дорівнює нулеві, тобто, коли

$$\left\langle \delta x \delta y \right\rangle + \left\langle \delta y \delta x \right\rangle = 0. \tag{8.71}$$

Тільки за умови (8.71) може досягатись рівність у співвідношенні Гайзенберга (8.61) для канонічно спряжених величин. Легко переконатись, що у випадку когерентного та стисненого станів (відповідно, $|v\rangle$ та $|\theta, v\rangle$) для координати та імпульсу виконується співвідношення (8.71).

Перший член у фігурних дужках (8.69) зникає з переходом до класичного опису, оскільки в класичній механіці величини δx та δy комутують. Другий не дорівнює нулеві лише тоді, коли існує кореляція між змінними x та y, яка, в свою чергу, може бути і у квантовому, і в класичному випадках. Кореляція може виникати внаслідок взаємодії системи з резервуаром (квантовим чи класичним).

З нерівності (8.69) випливає, що класична версія співвідношення невизначеності має вигляд:

$$\Delta x \Delta y \geq \left| \left\langle \delta x \delta y \right\rangle \right|. \tag{8.72}$$

8.8. Когерентні стани як базис. Неортогональність та переповненість

У попередніх параграфах ми виражали когерентні стани через фоківські стани, а також знаходили їхній вигляд у координатному представленні. Водночас самі когерентні стани часто використовуються як базис для інших квантових станів. Проте використання такого базису має деякі особливості, які розглянемо в цьому та наступних параграфах.

Насамперед знайдемо скалярний добуток двох станів:

$$\begin{aligned}\left\langle v_2 | v_1 \right\rangle &= e^{-\frac{1}{2}(|v_1|^2+|v_2|^2)} \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{v_2^{*n} v_1^k}{\sqrt{n!k!}} \left\langle n | k \right\rangle = \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|v_1|^2+|v_2|^2)} e^{v_1 v_2^*} = e^{-\frac{1}{2}|v_1-v_2|^2 + \frac{1}{2}(v_1 v_2^* - v_1^* v_2)}\end{aligned}. \tag{8.73}$$

Легко побачити, що $v_1 v_2^* - v_2 v_1^*$ уявне число, тому

$$\left| \left\langle v_2 | v_1 \right\rangle \right|^2 = e^{-|v_1-v_2|^2}. \tag{8.74}$$

З виразів (8.73), (8.74) можна зробити висновок, що ніякі два когерентні стани не є ортогональними на відміну від власних станів ермітових операторів. Проте, коли $|v_1 - v_2|^2 >> 1$, права частина (8.74) є малою. У цьому випадку стани $|v_1\rangle$ і $|v_2\rangle$ є майже ортогональними.

Когерентні стани накривають весь гільбертовий простір, тому попри неортогональність їх можна використовувати як базис. Щоб докладніше розглянути це питання, спочатку розкладемо одиничний оператор по проекційних операторах $|v\rangle\langle v|$. Для цього розглянемо інтеграл

$$\frac{1}{\pi}\int d^2 v |v\rangle\langle v|, \tag{8.75}$$

в якому інтегрування здійснюється по всій комплексній площині.

Зробимо заміну змінних:

$$v = re^{i\varphi}, \quad d^2 v = r dr d\varphi ,$$

де $\operatorname{Re} v = r\cos\varphi$, $\operatorname{Im} v = r\sin\varphi$.

Після цього вираз (8.75) набуває вигляду:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{n,k} e^{-r^2} \frac{r^{n+k+1}}{\sqrt{n!k!}} e^{i(n-k)\varphi} |n\rangle\langle k| =$$
$$= 2\int_0^\infty dr e^{-r^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{r^{2n+1}}{n!} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^\infty |n\rangle\langle n| = 1. \tag{8.76}$$

Остання рівність виконується внаслідок повноти множини фоківських станів $|n\rangle$. З формул (8.75), (8.76) випливає, що

$$\frac{1}{\pi}\int d^2 v |v\rangle\langle v| = \sum_{n=0}^\infty |n\rangle\langle n| = 1 . \tag{8.77}$$

Наявність коефіцієнта $1/\pi$, очевидно, зумовлена неортогональністю когерентних станів. Вираз (8.77), який називають у літературі розкладом одиниці, є аналогом критерію повноти власних функцій. Будь-яку функцію $|\psi\rangle$ можна, домноживши зліва на одиничний оператор (8.77), записати як суперпозицію когерентних станів

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2 v |v\rangle\langle v|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2 v \langle v|\psi\rangle |v\rangle , \tag{8.78}$$

де коефіцієнти розкладу $|\psi\rangle$ по когерентних станах дорівнюють $\frac{1}{\pi}\langle v|\psi\rangle$. Якщо цією функцією є інший когерентний стан ($|\psi\rangle = |v'\rangle$), то одержимо

$$|v'\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2 v \langle v|v'\rangle |v\rangle =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int d^2 v e^{-\frac{1}{2}|v-v'|^2} e^{\frac{1}{2}(v^* v' - v v'^*)} |v\rangle , \tag{8.79}$$

де ми використали формулу (8.73).

Як видно з правої частини (8.79), функція $|v'\rangle$ виражається, переважно, через стани $|v\rangle$, близькі до неї, тобто через стани, для яких різниця власних значень $|v - v'|$ не дуже велика.

Використання формули (8.78) для випадку фоківського стану $|\psi\rangle = |n\rangle$ та виразу (8.11) дає змогу одержати такий розклад у когерентному представленні:

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2 v e^{-\frac{1}{2}|v|^2} \frac{v^{*n}}{\sqrt{n!}} |v\rangle . \tag{8.80}$$

Порівняння виразу (8.80) з представленням фоківського стану у базисі когерентних станів, використаним у задачі **13**, демонструє неоднозначність такого розкладу. Про неоднозначність розкладу свідчить також вираз (8.79). Неоднозначність зумовлена неортогональністю будь-яких когерентних станів, на що вказує вираз (8.73).

8.9. Представлення операторів у базисі когерентних станів

Інтегральне представлення одиничного оператора через когерентні стани (8.77) дає змогу легко записати будь-який оператор у базисі когерентних станів. Справді, домножуючи довільний оператор $\hat{A}$ зліва й справа на одиничний оператор (8.77), одержимо:

$$\hat{A} = \frac{1}{\pi^2}\int\int d^2v'd^2v''\left|v'\right\rangle\left\langle v'\right|\hat{A}\left|v''\right\rangle\left\langle v''\right| =$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\int\int d^2v'd^2v''\left\langle v'\right|\hat{A}\left|v''\right\rangle\left|v'\right\rangle\left\langle v''\right| \quad . \qquad (8.81)$$

Можна легко перевірити, що будь-які матричні елементи оператора $\hat{A}$ в лівій частині та оператора в правій частині (8.81) однакові. Щоб переконатись у цьому, знайдемо їхні матричні елементи:

$$\left\langle v_1\right|\hat{A}\left|v_2\right\rangle = \frac{1}{\pi^2}\int\int dv'dv''\left\langle v'\right|\hat{A}\left|v''\right\rangle\left\langle v_1|v'\right\rangle\left\langle v''|v_2\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int\int dv'dv''\left\langle v_1|v'\right\rangle\left\langle v'\right|\hat{A}\left|v''\right\rangle\left\langle v''|v_2\right\rangle = \left\langle v_1\right|\hat{A}\left|v_2\right\rangle, \quad (8.82)$$

де ми двічі використали розклад одиниці (8.77) по когерентних станах.

Матричні елементи нормально впорядкованих операторів легко знаходяться в когерентному представленні, оскільки когерентні стани є власними правими функціями оператора знищення та власними лівими функціями оператора народження. Найчастіше використовують такі співвідношення:

$$\left\langle v'\right|a\left|v''\right\rangle = v''\left\langle v'|v''\right\rangle = v''e^{-\frac{1}{2}\left|v'-v''\right|^2}e^{\frac{1}{2}(v'^*v''-v'v''^*)},$$

$$\left\langle v'\right|a^+\left|v''\right\rangle = v'^*e^{-\frac{1}{2}\left|v'-v''\right|^2}e^{\frac{1}{2}(v'^*v''-v'v''^*)},$$

$$\left\langle v'\right|\hat{n}\left|v''\right\rangle = v'^*v''e^{-\frac{1}{2}\left|v'-v''\right|^2}e^{\frac{1}{2}(v'^*v''-v'v''^*)}. \qquad (8.83)$$

Для нормально впорядкованого оператора $f^N(a,a^+)$ матричні елементи дорівнюють

$$\left\langle v'\right|f^N(a,a^+)\left|v''\right\rangle = f^N(v'',v'^*)e^{-\frac{1}{2}\left|v'-v''\right|^2}e^{\frac{1}{2}(v'^*v''-v'v''^*)}. \quad (8.84)$$

Звідси одержимо вираз для діагональних елементів

$$\left\langle v\right|f^N(a,a^+)\left|v\right\rangle = f^N(v,v^*)\,. \qquad (8.85)$$

Тому середнє значення нормально впорядкованих операторів у когерентному стані одержується формальною заміною операторів a^+, a відповідно на v^*, v.

Далі проілюструємо, як можна використати цю обставину для спрощення обчислень у когерентному базисі.

8.10. Діагональне представлення антинормально впорядкованого оператора густини

У загальному випадку середнє значення фізичної величини визначається як слід від добутку оператора цієї величини $f(a,a^+)$ та оператора густини

$$\left\langle\hat{A}\right\rangle \equiv \left\langle f(a,a^+)\right\rangle = sp\left(f(a,a^+)\hat{\rho}\right).$$

Зазначимо, що операція $sp(\ldots)$ у когерентному базисі означає $\frac{1}{\pi}\int d^2v\left\langle v\right|\ldots\left|v\right\rangle$ (див. задачу (**6**)).

Глаубер та Сударшан показали, що оператор $\hat{\rho}$ можна представити в діагональному вигляді, якщо базисом є когерентні стани:

$$\hat{\rho} = \int d^2v\varphi(v)\left|v\right\rangle\left\langle v\right|, \qquad (8.86)$$

де $\varphi(v)$ – вагова функція.

Зазначимо, що така корисна властивість притаманна лише когерентним станам. На перший погляд здається, що вагову функцію $\varphi(v)$ у формулі (8.86) можна інтерпретувати як ймовірність перебування системи в стані $\left|v\right\rangle$. На користь такої (ймовірнісної) інтерпретації є й та обставина, що умова нормування оператора $\hat{\rho}$ зводиться до того, що сумарне по всіх когерентних станах значення $\varphi(v)$ дорівнює одиниці:

$$sp(\hat{\rho}) = \sum_{\psi} \langle\psi|\hat{\rho}|\psi\rangle =$$
$$= \sum_{\psi} \int d^2 v \langle\psi|v\rangle\langle v|\psi\rangle\varphi(v) = \int d^2 v\varphi(v) = 1\,.$$

Символом $|\psi\rangle$ позначені стани оператора якоїсь фізичної величини, наприклад, фоківські стани $|n\rangle$, для яких виконується умова повноти $\sum_{\psi}|\psi\rangle\langle\psi| = 1$. Проте існують такі стани поля (некласичні стани), для яких функція $\varphi(v)$ може бути від'ємною. У цьому випадку ймовірнісна інтерпретація втрачає сенс. Тому про вагову функцію часто кажуть як про квазіймовірність.

У літературі представлення оператора густини у вигляді (8.86) називають P-представленням Глаубера–Сударшана, а вагову функцію – P-розподілом, і для її позначення часто використовують літеру P замість φ.

Якщо відома вагова функція, то для знаходження середніх досить знати лише діагональні матричні елементи оператора $f(a,a^+)$. Це видно з наступного розгляду:

$$\langle f(a,a^+)\rangle = sp\{\hat{\rho} f(a,a^+)\} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int d^2 v' d^2 v\varphi(v)\langle v'|v\rangle\langle v|f(a,a^+)|v'\rangle =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int d^2 v' d^2 v\varphi(v)\langle v|f(a,a^+)|v'\rangle\langle v'|v\rangle =$$
$$= \int d^2 v\varphi(v)\langle v|f(a,a^+)|v\rangle.$$

Тут ми знову використали розклад одиниці (8.77) та представлення оператора густини у вигляді (8.86).

У випадку нормально впорядкованого оператора $f = f^N(a,a^+)$ його середнє значення дорівнює

$$\langle f^N(a,a^+)\rangle = \int d^2 v\varphi(v) f^N(v,v^*). \qquad (8.87)$$

Як бачимо, у цьому окремому випадку задача знаходження середніх значень фізичних величин зводиться до задач класичної статистичної механіки, оскільки в підінтегральному виразі (8.87) відсутні операторні величини. Треба зазначити, що середні значення впорядкованих операторів відіграють важливу роль у квантовій оптиці. Зокрема, в наступному розділі покажемо, що ймовірність детектування фотонів у результаті поглинання фоточутливим матеріалом описується саме нормально впорядкованими операторними функціями.

На принципову можливість представлення оператора $\hat{\rho}$ у діагональному вигляді вказують такі міркування. Припустимо, що оператор густини можна записати в антинормально впорядкованому вигляді:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^A(a,a^+) = \sum_{n,m} c_{nm} a^n a^{+m}\,. \qquad (8.88)$$

Вставимо одиничний оператор між a^n та a^{+m}. Тоді

$$\hat{\rho}^A = \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}\int d^2 v c_{nm} a^n|v\rangle\langle v|a^{+m} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n,m}\int d^2 v c_{nm} v^n v^{*m}|v\rangle\langle v| =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int d^2 v\hat{\rho}^A(v,v^*)|v\rangle\langle v|. \qquad (8.89)$$

Порівнюючи (8.89) з (8.86), знаходимо:

$$\varphi(v) = \frac{1}{\pi}\rho^A(v, v^*). \qquad (8.90)$$

Отже, якщо відомий явний вигляд оператора $\rho^A(a, a^+)$, то вагова функція $\varphi(v)$ діагонального представлення оператора густини визначається виразом (8.90). Проте в загальному випадку такий шлях знаходження $\varphi(v)$ не є простим, оскільки записати $\hat{\rho}$ в антинормально впорядкованому вигляді не завжди вдається. Проте Сударшан та Мехта (1965) запропонували метод знаходження функції $\varphi(v)$, який можна застосовувати для будь-яких операторів $\rho(a, a^+)$. Суть методу викладено у наступному параграфі.

8.11. Інтегральне представлення функції $\varphi(v)$

Вважаючи, що представлення (8.86) існує, а функція $\varphi(v)$ відома, домножимо $\hat{\rho}$ зліва на $\langle -u|$, а справа на $|u\rangle$. Якщо функції $|-u\rangle$ та $|u\rangle$ є когерентними станами, то одержимо:

$$\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle = \int d^2v\varphi(v)\langle -u|v\rangle\langle v|u\rangle =$$

$$= e^{-|u|^2}\int d^2v\varphi(v)e^{-|v|^2}e^{uv^* - u^*v}. \qquad (8.91)$$

За такого специфічного вибору когерентних станів $|-u\rangle$ та $|u\rangle$ величина $uv^* - u^*v$ є уявною, і тоді останній інтеграл у (8.91) можна вважати подвійним перетворенням Фур'є функції $\varphi(v)e^{-|v|^2}$. Це твердження стає очевиднішим, коли виразити комплексні числа u та v через дійсні величини p, q, P, Q:

$$u = p + iq; \quad v = P + iQ. \qquad (8.92)$$

Тоді

$$d^2v = dQdP, \quad uv^* - u^*v = i2(qP - pQ) \qquad (8.93)$$

і вираз (8.91) можна переписати у вигляді:

$$\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle = e^{-|u|^2}\int dQdP\varphi(P + iQ)e^{-(Q^2+P^2)}e^{i2(qP-pQ)}. \qquad (8.94)$$

Помножимо обидві частини (8.94) на $e^{|u|^2}e^{-i2(qP_1 - pQ_1)}$ і проінтегруємо по q і p. У підсумку одержимо:

$$\varphi(v_1)e^{-|v_1|^2} = \frac{1}{\pi^2}\int d^2ue^{|u|^2}\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle e^{-uv_1^* + u^*v_1}, \qquad (8.95)$$

де $v_1 = P_1 + iQ_1$.

Помножимо обидві частини (8.95) на $e^{|v_1|^2}$ і, замінивши $v_1 \to v$, одержимо остаточний вираз для вагової функції в діагональному представленні:

$$\varphi(v) = \frac{e^{|v|^2}}{\pi^2}\int d^2ue^{|u|^2}\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle e^{-uv^* + u^*v}. \qquad (8.96)$$

З виразу (8.96) можна побачити, що $\varphi(v)$ є дійсною величиною. Справді, застосувавши операцію комплексного спряження до обох частин (8.96) та зробивши заміну в інтегралі $u \to -u$, одержимо $\varphi(v) = \varphi^*(v)$. При цьому ми врахували, що $\hat{\rho}$ є ермітовим оператором:

$$\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle^* = \langle u|\hat{\rho}^+|-u\rangle = \langle u|\hat{\rho}|-u\rangle.$$

Формально, вираз (8.96) дає змогу знайти діагональне представлення будь-якого оператора $\hat{\rho}$. Проте в окремих випадках інтеграл у правій частині може бути розбіжним, оскільки в підінтегральній функції є експоненціальний множник $e^{|u|^2}$. Тоді формулою (8.96) не можна користуватись.

8.12. Q-розподіл

Крім P-розподілу використовують й деякі інші функції розподілу. Зокрема – це Q-розподіл, за допомогою якого спрощується знаходження середніх значень антинормально впорядкованих операторів. Вираз для функції розподілу в цьому випадку знаходять із таких міркувань.

Середнє значення антинормально впорядкованого оператора $f^A(a^+,a)$, який запишемо у вигляді:

$$f^A(a^+,a) = \sum_{m,n} c_{mn} a^m a^{+n},$$

дорівнює

$$\left\langle f^A(a^+,a)\right\rangle = sp\left(\hat{\rho} f^A(a^+,a)\right) = sp\left(\hat{\rho}\sum_{m,n} c_{mn} a^m a^{+n}\right) =$$

$$= sp\left(\sum_{m,n} c_{mn} a^{+n}\hat{\rho} a^m\right) = \frac{1}{\pi}\int d^2v \langle v|\hat{\rho}|v\rangle \sum_{m,n} c_{mn} v^{*n} v^m \equiv$$

$$\equiv \int d^2 v Q(v) f^A(v^*,v), \tag{8.97}$$

де функцію Q-розподілу визначають діагональним матричним елементом оператора густини:

$$Q(v) = \frac{1}{\pi}\langle v|\hat{\rho}|v\rangle. \tag{8.98}$$

Зазначимо, що ми використали у (8.97) циклічну перестановку операторів під знаком $sp(\ldots)$.

У випадку рівноважного стану оператор густини дорівнює $\hat{\rho} = (1-e^{-\alpha})e^{-\alpha a^+ a}$ (див. позначення (2.75)). Тоді, записуючи функції $|v\rangle$ у фоківському представленні, можна

знайти явний вираз для Q-розподілу. Знаходження $Q(v)$ значно спрощується, якщо використати формулу (7.33), за якою експоненціальний оператор $e^{-\alpha a^+ a}$ можна записати в нормально впорядкованому вигляді.

Відтак, маємо:

$$Q(v) = \frac{1}{\pi}\langle v|\hat{\rho}|v\rangle = \frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{-\alpha}-1\right)^k}{k!}\langle v|a^{+k}a^k|v\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\alpha}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{-\alpha}-1\right)^k}{k!}|v|^{2k} = \frac{1}{\pi(n_P+1)} e^{-|v|^2/(n_P+1)}, \tag{8.99}$$

де $n_P = \left(e^{\alpha}-1\right)^{-1}$.

Отже, середнє значення антинормально впорядкованого оператора $f^A(a^+,a)$ знаходиться за допомогою функції Q-розподілу:

$$\left\langle f^A(a^+,a)\right\rangle = \int d^2 v Q(v) f^A(v^*,v). \tag{8.100}$$

Оскільки $Q(v)$ дорівнює середньому значенню оператора фізичної величини $\hat{\rho}/\pi$ у стані $|v\rangle$, тобто середньому значенню ермітового оператора, то $Q(v)$ завжди є дійсним числом. До того ж – це невід'ємне число. Останню властивість можна довести, використавши рівняння (8.98) та представлення оператора $\hat{\rho}$ у вигляді розкладу по повній системі власних функцій оператора якоїсь фізичної величини:

$$\hat{\rho} = \sum_{\psi} P_{\psi}|\psi\rangle\langle\psi|,$$

де P_ψ вже можна вважати ймовірністю знаходження системи в стані $|\psi\rangle$. Отже, P_ψ є невід'ємним числом.

Тоді

$$Q(v) = \frac{1}{\pi}\langle v|\hat{\rho}|v\rangle = \frac{1}{\pi}\sum_\psi P_\psi \langle v|\psi\rangle\langle\psi|v\rangle = \\ = \frac{1}{\pi}\sum_\psi P_\psi \left|\langle v|\psi\rangle\right|^2 > 0 .$$

Через те, що функція $Q(v)$ позитивна, вона завжди обмежена, оскільки $\left|\langle v|\psi\rangle\right|^2 \le 1$, а сума $\sum_\psi P_\psi = 1$. Цією властивістю Q-розподіл істотно відрізняється від P-розподілу.

Оскільки Q- та P-розподіли визначаються одним і тим же статистичним оператором $\hat{\rho}$, то між ними існує залежність, що має інтегральний характер:

$$Q(v) = \frac{1}{\pi}\langle v|\hat{\rho}|v\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\langle v|\int d^2v'\varphi(v')|v'\rangle\langle v'|v\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d^2v'\varphi(v')\left|\langle v'|v\rangle\right|^2.$$

Використовуючи формулу (8.74), одержимо:

$$Q(v) = \frac{1}{\pi}\int d^2v'\varphi(v')e^{-|v-v'|^2}.$$

Як бачимо, функція $Q(v)$ лінійно залежить від усіх можливих значень $\varphi(v')$, що є наслідком неортогональності когерентних станів $\left(\langle v'|v\rangle \neq 0\right)$.

8.13. Розподіл Вігнера–Вейля

P- та Q-розподіли відповідають двом типам впорядкування операторних функцій: нормально і антинормально впорядкованим. Існує також розподіл, за допомогою якого можна знаходити середні від симетризованих операторних функцій. Наприклад, добутку класичних величин координати та імпульсу qp можна поставити у відповідність такі добутки операторів:

$$\hat{q}\hat{p},\ \hat{p}\hat{q},\ \frac{1}{2}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}).$$

У загальному випадку симетризовану функцію двох операторів $\hat{q}$ і $\hat{p}$ можна записати у вигляді інтегралу:

$$f^W(\hat{q},\hat{p}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dQdPd\sigma d\tau f^W(Q,P)e^{i(Q-\hat{q})\sigma + i(P-\hat{p})\tau}, \quad (8.101)$$

де $f^W(Q,P)$ – класичний аналог операторної функції.

Впорядкування такого типу називають вейлівським упорядкуванням. Функція $f^W(\hat{q},\hat{p})$ є симетризованою відносно порядку розташування операторів. У цьому можна переконатись, записавши експоненціальний множник у вигляді ряду:

$$e^{-i\hat{q}\sigma - i\hat{p}\tau} = \sum_n \frac{(-i\hat{q}\sigma - i\hat{p}\tau)^n}{n!}.$$

Легко видно, що після розкриття круглих дужок різні доданки будуть представляти з однаковою вагою усі можливі розміщення операторів $\hat{q}$ і $\hat{p}$ один відносно іншого.

Симетризовані функції розподілу широко використовують для одержання квантових кінетичних рівнянь, аналогічних класичним.

У класичному випадку вираз (8.101) перетворюється на тотожність, а у квантовому – це один з можливих квантових аналогів класичної функції двох фізичних величин.

Знайдемо середнє значення (8.101), обчислюючи слід від добутку операторів $f^W\left(\hat{q},\hat{p}\right)$ та $\hat{\rho}$. Власні функції оператора координати використаємо як базис:

$$\left\langle f^W\left(\hat{q},\hat{p}\right)\right\rangle = sp\left(f^W\left(\hat{q},\hat{p}\right)\hat{\rho}\right) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int dq' dQ dP d\sigma d\tau f^W\left(Q,P\right) e^{iQ\sigma+iP\tau}\left\langle q'\right| e^{-i\hat{q}\sigma-i\hat{p}\tau}\hat{\rho}\left|q'\right\rangle. \tag{8.102}$$

Вираз (8.102) можна спростити, використавши теорему Кемпбелла–Бейкера–Хаусдорфа. Експоненціальний множник у кутових дужках набуде вигляду:

$$e^{-i\hat{q}\sigma-i\hat{p}\tau} = e^{-i\hat{p}\tau}e^{-i\hat{q}\sigma}e^{-i\frac{\hbar}{2}\sigma\tau}.$$

Далі інтеграл по q' перепишемо як

$$\int dq'\left\langle q'\right|e^{-i\hat{p}\tau}e^{-i\hat{q}\sigma}\hat{\rho}\left|q'\right\rangle =$$
$$= \int dq'\left\langle q'\right|e^{-i\hat{p}\tau/2}e^{-i\hat{q}\sigma}\hat{\rho}e^{-i\hat{p}\tau/2}\left|q'\right\rangle =$$
$$= \int dq'\left\langle q'-\frac{\hbar}{2}\tau\right|e^{-i\hat{q}\sigma}\hat{\rho}\left|q'+\frac{\hbar}{2}\tau\right\rangle =$$
$$= \int dq' e^{-i(q'-\hbar\tau/2)\sigma}\left\langle q'-\frac{\hbar}{2}\tau\right|\hat{\rho}\left|q'+\frac{\hbar}{2}\tau\right\rangle. \tag{8.103}$$

Тут ми використали циклічну перестановку операторів під знаком $sp(\ldots)$, а також операторні рівності

$$e^{-i\hat{p}\tau/2}\left|q'\right\rangle = \left|q'+\frac{\hbar}{2}\tau\right\rangle, \left\langle q'\right|e^{-i\hat{p}\tau/2} =$$

$$= \left\langle q'-\frac{\hbar}{2}\tau\right|, \left\langle q'-\frac{\hbar}{2}\tau\right|e^{-i\hat{q}\sigma} =$$
$$= e^{-i(q'-\hbar\tau/2)\sigma}\left\langle q'-\frac{\hbar}{2}\tau\right| \tag{8.104}$$

(див. задачу (**15**)).

Підставляючи (8.104) у (8.102) та інтегруючи по σ та q', одержимо

$$\left\langle f^W\left(\hat{q},\hat{p}\right)\right\rangle = \int dq dp f^W\left(q,p\right) W\left(q,p\right), \tag{8.105}$$

де функція $W\left(q,p\right)$ задається інтегралом

$$W(q,p) = \frac{1}{2\pi}\int d\tau e^{ip\tau}\left\langle q-\frac{\hbar}{2}\tau\right|\hat{\rho}\left|q+\frac{\hbar}{2}\tau\right\rangle \tag{8.106}$$

і має назву функції розподілу Вігнера у фазовому (p,q) просторі. Після інтегрування її по всіх значеннях q та p, одержимо одиницю. Проте функція $W(q,p)$, як і $\varphi(v)$, не є справжньою ймовірністю значень q та p, оскільки в деяких випадках вона може набувати від'ємних значень. Тому її часто називають густиною квазіймовірності. Вона аналогічна функціям P- та Q-розподілів і її можна знайти за допомогою рівняння (8.106), коли відомий оператор густини $\hat{\rho}$. Формула (8.105) показує, що середні значення симетрично впорядкованого оператора $f^W\left(\hat{q},\hat{p}\right)$ знаходяться простим інтегруванням у фазовому просторі добутку функцій $f^W\left(q,p\right)$ та $W(q,p)$.

В окремому випадку, коли система перебуває у квантовому стані $\left|\psi\right\rangle$, оператор густини дорівнює $\hat{\rho} = \left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|$.

Тоді функція розподілу дорівнює:

$$W(q,p)=\frac{1}{2\pi}\int d\tau e^{ip\tau}\psi^*\left(q+\frac{\hbar}{2}\tau\right)\psi\left(q-\frac{\hbar}{2}\tau\right), \qquad (8.107)$$

де $\psi(q)=\langle q|\psi\rangle$ – хвильова функція Шредінгера.

Після інтегрування (8.107) по всіх значеннях p, одержимо справжню ймовірність значення q, а саме: $|\psi(q)|^2$.

Подібно можна показати, що $\int dqW(q,p)$ є ймовірністю значення імпульсу p. Останню властивість можна легко довести, врахувавши, що власна функція оператора імпульсу в координатному представленні дорівнює:

$$\langle q|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{iqp/\hbar}$$

і тоді

$$\begin{aligned}e^{ip\tau}&=e^{-ip(q-\hbar\tau/2)/\hbar}e^{ip(q+\hbar\tau/2)/\hbar}=\\&=2\pi\hbar\left\langle p\middle|q-\frac{\hbar}{2}\tau\right\rangle\left\langle q+\frac{\hbar}{2}\tau\middle|p\right\rangle.\end{aligned}$$

Підставляючи такий вираз для експоненти у (8.106), одержимо:

$$\begin{aligned}&\int dqW(q,p)=\\&=\hbar\int dqd\tau\left\langle p\middle|q-\frac{\hbar}{2}\tau\right\rangle\left\langle q-\frac{\hbar}{2}\tau\middle|\psi\right\rangle\left\langle\psi\middle|q+\frac{\hbar}{2}\tau\right\rangle\left\langle q+\frac{\hbar}{2}\tau\middle|p\right\rangle\end{aligned} \qquad (8.108)$$

Після заміни змінних в інтегралі

$$q-\frac{\hbar}{2}\tau=x,\quad q+\frac{\hbar}{2}\tau=y,$$

одержимо:

$$\begin{aligned}&\int dqW(q,p)=\\&=\int dxdy\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle\langle\psi|y\rangle\langle y|p\rangle=\left|\tilde{\psi}(p)\right|^2.\end{aligned} \qquad (8.109)$$

Тут $\tilde{\psi}(p)=\langle p|\psi\rangle$ – хвильова функція в p-просторі.

Формула (8.109) задає густину ймовірності величини p.

8.14. Приклади вагової функції $\varphi(v)$

Застосуємо метод знаходження вагової функції, описаний у параграфі **8.11**, для деяких найпростіших випадків.

а). Нехай, як і в параграфі **8.12,** оператор $\hat{\rho}$ описує статистичні властивості рівноважного (теплового) випромінювання:

$$\begin{aligned}&\hat{\rho}=C'e^{-\frac{\hbar\omega}{T}(\hat{n}+1/2)}\equiv Ce^{-\alpha\hat{n}},\\&\alpha=\frac{\hbar\omega}{T},\quad C=1-e^{-\alpha}\end{aligned} \qquad (8.110)$$

(див. рівняння (2.71), (2.75)). Матричні елементи оператора густини, що входять у формулу (8.96), можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}&\left\langle -u|\hat{\rho}|u\right\rangle=C\left\langle -u\middle|e^{-\alpha\hat{n}}\middle|u\right\rangle=\\&=Ce^{-|u|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-u^*u\right)^n e^{-\alpha n}}{n!}=Ce^{-|u|^2}e^{-|u|^2e^{-\alpha}}.\end{aligned} \qquad (8.111)$$

Отже,

$$\left\langle -u|\hat{\rho}|u\right\rangle=\left(1-e^{-\alpha}\right)e^{-|u|^2\left(e^{-\alpha}+1\right)}. \qquad (8.112)$$

Як і раніше, використаємо позначення

$$u = p + iq; \quad v = P + iQ .$$

Тоді $-uv^* + u^*v = i2(pQ - qP)$ і після підстановки цього значення, а також (8.112) у (8.96) одержимо:

$$\varphi(v) = \frac{e^{|v|^2}}{\pi^2}\left(1 - e^{-\alpha}\right)\int dqdp e^{-|u|^2 e^{-\alpha} + i2(pQ - qP)} =$$
$$= \frac{e^{|v|^2\left(1 - e^{\alpha}\right)}}{\pi}\left(1 - e^{-\alpha}\right)e^{\alpha} = \frac{1}{\pi\overline{n}} e^{-|v|^2/n_P} \qquad . \qquad (8.113)$$

Отже,

$$\varphi(v) = \frac{1}{\pi n_P} e^{-|v|^2/n_P} \qquad (8.114)$$

і оператор густини в діагональному представленні когерентних станів набуває такого вигляду:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi n_P}\int d^2v e^{-|v|^2/n_P} |v\rangle\langle v|. \qquad (8.115)$$

Порівнюючи (8.114) з (8.99), бачимо, що функцію рівноважного φ-розподілу можна одержати з рівноважного Q-розподілу формальною заміною в останньому $n_P + 1$ на n_P.

Використовуючи (8.115), можна для перевірки методу знайти середнє значення $\overline{n}$. Воно дорівнює

$$\overline{n} = sp(\hat{n}\hat{\rho}) = \int d^2v \langle v|\hat{n}|v\rangle \frac{1}{\pi n_P} e^{-|v|^2/n_P} =$$

$$= \int d^2v |v|^2 \frac{1}{\pi n_P} e^{-|v|^2/n_P} =$$

$$= \int_0^{\infty} d|v||v|^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\pi n_P} e^{-|v|^2/n_P} = n_P \qquad (8.116)$$

б). Система перебуває в когерентному стані $|v'\rangle$. Очевидно, що оператор $\hat{\rho}$ у цьому випадку дорівнює $|v'\rangle\langle v'|$. Формально його можна знову виразити через вагову функцію $\varphi(v)$.

Використовуючи загальну процедуру, знайдемо

$$\varphi(v) = \frac{e^{|v|^2}}{\pi^2}\int d^2u e^{|u|^2} \langle -u|\hat{\rho}|u\rangle e^{-uv^* + u^*v} =$$

$$= \frac{e^{|v|^2}}{\pi^2}\int d^2u e^{|u|^2} \langle -u|v'\rangle\langle v'|u\rangle e^{-uv^* + u^*v} =$$

$$= \frac{e^{|v|^2 - |v'|^2}}{\pi^2}\int d^2u \sum_{n,m}\frac{\left(-u^*v'\right)^n}{n!}\frac{\left(v'^*u\right)^m}{m!} e^{-uv^* + u^*v} =$$

$$= \frac{e^{|v|^2 - |v'|^2}}{\pi^2}\int d^2u e^{u(v'^* - v^*) + u^*(v - v')} = \delta^2(v - v').$$

Отже,

$$\varphi(v) = \delta^2(v - v'). \qquad (8.117)$$

Коли джерелом випромінювання є лазер, то часто можна вважати, що інтенсивність випромінювання є постійною, а фаза довільна, тобто є хаотичною величиною. У цьому випадку вагова функція має вигляд $\varphi(v) = C\delta(|v| - |v'|)$ і не залежить від аргументів комплексних чисел v і v'. Константу C можна визначити, задавши середнє значення числа заповнення $\overline{n}$:

$$\overline{n} = \int d^2v |v|^2 C\delta(|v| - |v'|) =$$
$$= C\int d|v||v|^3 \delta(|v| - |v'|)\int_0^{2\pi} d\theta = C2\pi|v'|^3 = |v'|^2. \qquad (8.118)$$

Звідси одержимо:

$$\varphi(v) = \frac{1}{2\pi|v'|}\delta(|v| - |v'|). \qquad (8.119)$$

Як бачимо, у цьому випадку оператор густини $\hat{\rho}$ виражається через проекційні оператори усіх когерентних станів, у яких $|v| = |v'|$. Коли генерація відбувається під дією накачування, що істотно перевищує порогове значення, то така апроксимація стану лазерного випромінювання є реалістичнішою, ніж апроксимація за допомогою вагової функції (8.117). У цьому випадку флуктуації інтенсивності випромінювання малі, натомість флуктуації фази великі.

в). В обох попередніх випадках ми одержали додатні значення вагової функції. Функцію $\varphi(v)$ для таких систем можна трактувати як густину ймовірності перебування їх у когерентному стані $|v\rangle$. Проте, як зазначалось вище, існують такі стани поля, коли φ має від'ємний чи невизначений знак. Для ілюстрації сказаного розглянемо поле у фоківському стані $|n\rangle$. Тоді, підставляючи у вираз (8.96) значення $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$, одержимо:

$$\varphi(v) = \frac{e^{|v|^2}}{\pi^2}\int d^2u e^{|u|^2}\langle -u|n\rangle\langle n|u\rangle e^{-uv^* + u^*v} =$$

$$= \frac{e^{|v|^2}}{\pi^2}\int d^2u \frac{\left(-|u|^2\right)^n}{n!} e^{-uv^* + u^*v} = \frac{e^{|v|^2}}{n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial v^{*n}\partial v^n}\delta^2(v).$$

Для фоківського стану $|n\rangle$ вагова функція дорівнює:

$$\varphi(v) = \frac{e^{|v|^2}}{n!}\frac{\partial^{2n}}{\partial v^{*n}\partial v^n}\delta^2(v). \qquad (8.120)$$

Як бачимо, це дуже сингулярна функція, яка може мати фізичний зміст тільки тоді, коли вона входить як окремий множник разом з плавними функціями в якийсь підінтегральний вираз, де проводиться інтегрування по змінних $\mathrm{Re}\, v$ та $\mathrm{Im}\, v$. Знак $\varphi(v)$ також невизначений.

Отже, про функцію (8.120) не можна говорити як про густину ймовірності.

Roy. J. Glauber. *The quantum Theory of Optical Coherence.* – Phys. Rev., 1963. – **130**. – P. 2529–2539.

Roy. J. Glauber. *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field.* – Phys. Rev., 1963. – **131**. – P. 2766–2788.

Roy. J. Glauber. *Nobel Lecture: One hundred years of light quanta.* – Rev. Mod. Phys., 2006. – **78**. – P. 1267–1278.

Задачі

1. Знайти середні та середньоквадратичні значення операторів координати та імпульсу $\hat{q}, \hat{p}$ в рівноважному стані, використовуючи вагову функцію (8.114). Обчислити добуток невизначеностей цих величин і порівняти з відповідною невизначеністю в когерентному стані.

2. Використовуючи фоківське представлення для хвильових функцій, показати, що оператор народження для одномодового електромагнітного поля не має правого власного стану.

Вказівка.

Потрібно знайти рекурентні співвідношення між коефіцієнтами розкладу можливої власної функції по фоківських станах, подібні до рівняння (8.5).

3. У початковий момент часу $t=0$ система знаходиться в когерентному стані $|v\rangle$. Еволюція гайзенбергівського оператора знищення описується рівнянням

$$\dot{a}(t)=f(a(t),t),$$

де $f(a(t),t)$ – відома функція.

Довести, що в будь-який момент часу t система буде в когерентному стані.

Розв'язок

Доведемо, що дія оператора a на стан системи $U(t)|v\rangle$ в момент часу t ($U(t)$ – оператор еволюції) зведеться до помноження $U(t)|v\rangle$ на якесь число.

Дія оператора a на хвильову функцію в момент t описується формулою

$$aU(t)|v\rangle=U(t)U^{-1}(t)aU(t)|v\rangle\equiv U(t)a(t)|v\rangle, \quad (1)$$

де стан системи вже не залежить від часу, натомість з'являється залежність від часу оператора знищення:

$$a(t)=U^{-1}aU.$$

Умову

$$\frac{da(t)}{dt}=f(a(t),t) \quad (2)$$

можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння першого порядку для невідомої функції $a(t)$. Його розв'язок залежить лише від початкового значення $a(t=0)=a$ та часу.

Отже розв'язок має вигляд:

$$a(t)=F(a(0),t). \quad (3)$$

Тоді, підставляючи (3) у праву частину (1) і враховуючи рівняння (8.1), одержимо:

$$U(t)a(t)|v\rangle=U(t)F(a(0),t)|v\rangle=$$
$$=U(t)F(v,t)|v\rangle=F(v,t)U(t)|v\rangle. \quad (4)$$

Отже,

$$aU(t)|v\rangle=F(v,t)U(t)|v\rangle. \quad (5)$$

Рівняння (5) означає, що $U(t)|v\rangle$ є власною функцією оператора a (тобто є когерентним станом), власне значення якого $F(v,t)$ в загальному випадку залежить від часу.

4. Довести тотожності

$$a^+|v\rangle=\left(\frac{\partial}{\partial v}+\frac{1}{2}v^*\right)|v\rangle,$$

$$\langle v|a=\left(\frac{\partial}{\partial v^*}+\frac{1}{2}v\right)\langle v|.$$

Похідні потрібно знаходити, вважаючи v і v^* незалежними змінними.

Вказівка.

Можна використати розклад когерентного стану $|v\rangle$ по фоківських станах.

5. Довести, що:

а). $a^+|v\rangle\langle v|=\left(v^*+\partial_v\right)|v\rangle\langle v|$;

б). $|v\rangle\langle v|a=\left(v+\partial_{v^*}\right)|v\rangle\langle v|$.

Вказівка.

Для доведення досить показати, що будь-які матричні елементи операторів у лівій та правій частинах рівні між собою, наприклад, $\langle n_1|\ldots|n_2\rangle$, де $|n_1\rangle$ та $|n_2\rangle$ – довільні фоківські стани.

6. Показати, що в базисі когерентних функцій знаходження сліду довільного оператора $\hat{A}$ задається виразом:

$$sp\left(\hat{A}\right)=\frac{1}{\pi}\int d^2v\langle v|\hat{A}|v\rangle .$$

7. Використовуючи когерентні стани як базис, довести, що слід від оператора зміщення $D(v')=e^{v'a^+-v'^*a}$ дорівнює:

$$sp\left(D(v')\right)=\pi\delta^2(v') .$$

8. Використовуючи розв'язок попередньої задачі, показати, що

$$sp\left(D(v_1)D(v_2)\right)=\pi\delta^2(v_1+v_2) .$$

9. Довести, що середнє значення оператора зміщення $D(v')$ у випадку рівноважного випромінювання задається виразом:

$$\langle D(v')\rangle=\exp\left[-|v'|^2(n_P+1/2)\right].$$

Вказівка.

Використати теорему Кемпбела–Бейкера–Хаусдорфа. Для усереднення використати вагову функцію (8.114).

10. Використовуючи діагональне представлення оператора густини $\hat{\rho}$ (як і в попередній задачі), знайти середньоквадратичні флуктуації кількості фотонів $\langle\delta n^2\rangle=\langle(\hat{n}-\overline{n})^2\rangle$ в окремій моді теплового випромінювання. Результат порівняти із знайденим у розділі 2.

11. Знайти середнє значення оператора $\langle A^+A\rangle$ у когерентному стані $|v\rangle$, $A=(\hat{n}+1)^{-1/2}a$.

Вказівка.

Використати розклад когерентних станів по фоківських станах (8.9), (8.10) та тотожність $\frac{1}{\hat{n}+1}|n\rangle=\frac{1}{n+1}|n\rangle$,

де $|n\rangle$ – n-фотонний фоківський стан.

12. Показати, що оператор густини (8.115) тотожно дорівнює рівноважному оператору $\hat{\rho}=Ce^{-\frac{\hbar\omega\hat{n}}{T}}$.

Вказівка.

Врахувати, що n_P – це розподіл Планка.

13. Показати, що фокіський стан $|n\rangle$ можна представити у вигляді суперпозиції когерентних станів $|v\rangle$:

$$|n\rangle=\frac{\sqrt{n!}}{2\pi i}\oint dv\frac{e^{\frac{1}{2}|v|^2}}{v^{n+1}}|v\rangle , \tag{1}$$

де контур інтегрування проходить у комплексній площині довкола точки $v=0$.

Розв'язок

Перепишемо підінтегральну функцію, представивши $|v\rangle$ у фоківському базисі:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}|v|^2}}{v^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}|v|^2}\frac{v^k}{\sqrt{k!}}|k\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v^{k-n-1}}{\sqrt{k!}}|k\rangle. \tag{2}$$

Оскільки в межах аналітичності підінтегральної функції контур інтегрування можна деформувати довільно, візьмемо його у вигляді кола з центром у точці $v=0$. Для такого контуру можна записати:

$$v=re^{i\theta},\quad dv=ire^{i\theta}d\theta, \tag{3}$$

де r – радіус кола.

Лише доданок з $k=n$ дає ненульовий внесок (що дорівнює $\frac{2\pi i}{\sqrt{n!}}|n\rangle$) в інтеграл у правій частині (1). Інтеграли від решти членів зводяться до вигляду

$$const\int_0^{2\pi}d\theta e^{im\theta} \tag{4}$$

і дорівнюють нулеві при $m\neq 0$. Враховуючи вирази (2), (4), легко переконатись, що права частина (1) дорівнює $|n\rangle$, тобто така ж, як і ліва.

14. Показати, що симетризована квантова мікроскопічна функція розподілу частинок у фазовому просторі має вигляд:

$$\hat{f}^W(\vec{r},\vec{p})=\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{i=1}^{N}\int d\vec{\tau}\delta\left(\vec{r}-\hat{\vec{r}}_i+\frac{\hbar}{2}\vec{\tau}\right)e^{i\vec{\tau}(\vec{p}-\hat{\vec{p}}_i)},$$

де N – кількість частинок; $\hat{\vec{r}}_i$ і $\hat{\vec{p}}_i$ – оператори координати та імпульсу i-ої частинки. Класичний аналог оператора $\hat{f}^W$ має вигляд:

$$f(\vec{r},\vec{p})=\sum_{i=1}^{N}\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)\delta(\vec{p}-\vec{p}_i)$$

(див. задачу **1**, розділ 4).

Вказівка.
Використати формулу (8.101).

15. Показати, що дія оператора $e^{-i\hat{p}\tau}$ на вектор стану $|q\rangle$ змінює його на $|q+\hbar\tau\rangle$. Тут $|q\rangle$ – власний стан оператора координати: $\hat{q}|q\rangle=q|q\rangle$; $\hat{p}$ – оператор імпульсу.

Розв'язок

У виразі $e^{-i\hat{p}\tau}|q\rangle$ вставимо одиничний оператор $\int dp|p\rangle\langle p|$ між множниками: $\int dpe^{-i\hat{p}\tau}|p\rangle\langle p|q\rangle$.

Оскільки $|p\rangle$ є власною функцією оператора імпульсу ($\hat{p}|p\rangle=p|p\rangle$), то

$$\int dpe^{-i\hat{p}\tau}|p\rangle\langle p|q\rangle=\int dpe^{-ip\tau}|p\rangle\langle p|q\rangle. \tag{1}$$

Використовуючи власну функцію оператора імпульсу в координатному представленні

$$\langle q|p\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipq/\hbar},\quad \langle p|q\rangle=\langle q|p\rangle^*=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipq/\hbar}, \tag{2}$$

вираз (1) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}&\int dp e^{-ip\tau}|p\rangle\langle p|q\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp e^{-ip(q+\hbar\tau)/\hbar}|p\rangle=\\&=\int dp\langle p|q+\hbar\tau\rangle|p\rangle=|q+\hbar\tau\rangle,\end{aligned}\tag{3}$$

що й треба було довести.

Отже,

$$e^{-i\hat{p}\tau}|q\rangle=|q+\hbar\tau\rangle.\tag{4}$$

Аналогічну рівність

$$\langle q|e^{-i\hat{p}\tau}=\langle q-\hbar\tau|\tag{5}$$

одержують шляхом ермітового спряження обох частин (4).

9. Детектування фотонів

Для реєстрації фотонів найчастіше використовують пристрої, в основі роботи яких лежить явище фотоефекту. Пояснення фотоефекту подано у першій главі. Для детектування фотоелектронів (електронів, вирваних з металу під час поглинання ними окремих квантів світла) використовуються фотопомножувачі. На рис. 27 зображена схема такого пристрою. Електрон e після виходу з катода притягується до позитивно зарядженого електрода. Прискорюючись в електричному полі, електрон збільшує свою енергію до рівня, достатнього, щоб вибити вже декілька електронів під час зіткнення з позитивним електродом. Вторинні електрони, в свою чергу, рухаються з прискоренням до наступного електрода і цей процес повторюється багато разів. Зрештою, в електричному колі проходить імпульс струму, який неважко зареєструвати і який свідчить про факт поглинання фотона. Сучасні детектори можуть з дуже високою ймовірністю реєструвати окремі фотони.

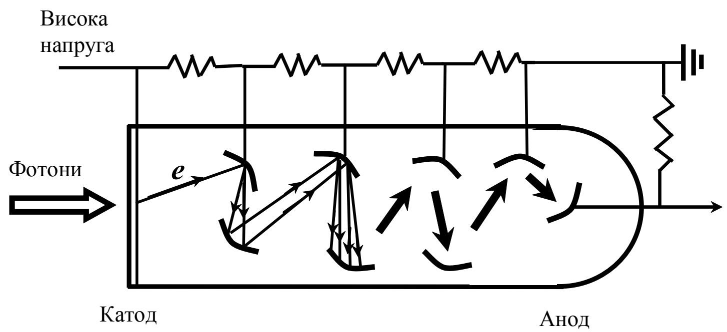

Рис. 27. Схема детектування фотонів за допомогою фотопомножувача (див. пояснення в тексті)

9.1. Детектування стаціонарного потоку фотонів

Нехай на детектор падає постійний світловий потік, з якого за якийсь час T у середньому реєструються N_0 фотонів (N_0/T фотонів за одиницю часу). Розіб'ємо весь інтервал T на N рівних частин ($\Delta t = \Delta t_i = T/N$), причому візьмемо $N >> N_0$ (рис. 28). Зафарбовані інтервали – це ті, де детектор зареєстрував фотони (N_0 зафарбованих інтервалів). Очевидно, що ймовірність реєстрації фотона в i-му інтервалі (p_i) дорівнює:

$$p_i = \frac{N_0}{N} = p << 1 . \tag{9.1}$$

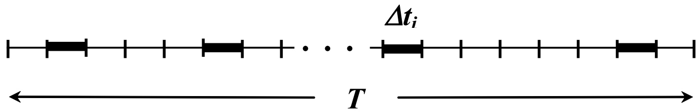

Рис. 28. Інтервал T розбитий на N рівних елементів довжиною Δt_i

Нерівність (9.1) означає, що ймовірність реєстрації двох фотонів у одному інтервалі Δt_i мала, і далі нехтуватимемо цією величиною.

Знайдемо ймовірність реєстрації k фотонів за час T. Виходитимемо з очевидної тотожності: сума ймовірностей зареєструвати та не зареєструвати фотон в якомусь з інтервалів Δt_i дорівнює одиниці:

$$p_i + (1 - p_i) = 1 . \tag{9.2}$$

Добуток суми цих ймовірностей по усіх інтервалах також означатиме ймовірність достовірної події, а саме:

ймовірність зареєструвати чи не зареєструвати в кожному інтервалі Δt_i фотон. Використовуючи формулу для бінома Ньютона, одержимо

$$1 = \prod_i^N \left[p_i + (1 - p_i) \right] = \left[p + (1 - p) \right]^N = \\ = \sum_{k=0}^{N} \frac{N(N-1)...(N-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{N-k} , \tag{9.3}$$

де k-ий член цієї суми означає ймовірність $P(k)$ зареєструвати рівно k фотонів. Очевидно, що найбільше практичне значення мають ймовірності подій, де

$$k \sim N_0 << N . \tag{9.4}$$

Для таких значень k відповідний член у правій частині (9.3) можна записати у вигляді:

$$\frac{(pN)^k}{k!} (1-p)^{N-k} , \tag{9.5}$$

де зроблено заміну $N(N-1)\ldots(N-k+1) \approx N^k$.

Останній множник у (9.5) можна переписати у вигляді:

$$(1-p)^{N-k} = \left(1 - \frac{N_0}{N}\right)^{N-k} = \left(1 - \frac{N_0}{N}\right)^{\frac{N}{N_0}N_0 - k} \approx \\ \approx e^{-N_0} \left(1 - \frac{N_0}{N}\right)^{-k} \approx e^{-N_0} , \tag{9.6}$$

оскільки вважаємо величину N достатньо великою:

$$kN_0 << N .$$

Тоді, враховуючи вирази (9.5) та (9.6), одержимо остаточний вираз:

$$P(k) = \frac{\bar{n}^k}{k!} e^{-\bar{n}} , \tag{9.7}$$

де ми повернулись до звичнішого позначення $N_0 \equiv \overline{n}$, яке використовувалось у попередніх розділах. Як бачимо, функція (9.7) є не що інше, як розподіл Пуассона. Нагадаємо, що саме такий розподіл фотонів по фоківських станах спостерігається для електромагнітного поля окремої моди, що знаходиться в когерентному стані. Очевидно, що залишаються в силі знайдені там вирази для середнього значення та середньоквадратичних флуктуацій кількості фотонів, а саме:

$$\overline{n} = \sum_k kP(k), \quad \overline{\delta n^2} = \overline{n} . \qquad (9.8)$$

Нагадаємо, що розподіл (9.7) одержано за умови статистичної незалежності окремих подій реєстрації фотонів, а також стаціонарність фотонного потоку. Далі розглянемо загальніші випадки, коли такі наближення необов'язкові. Насамперед знайдемо розподіл $P(k)$ для випадку, коли інтенсивність фотонного поля, що взаємодіє з детектором, залежить від часу.

9.2. Детектування нестаціонарного випромінювання

Якщо не брати до уваги випадки дуже сильних полів, то можна вважати, що кількість вирваних із катода електронів пропорційна інтенсивності поля I ($p_i \sim I(t_i)$). Очевидно, що ймовірність p_i пропорційна також інтервалу часу Δt_i.

Тоді можна записати:

$$p_i = \eta I(t_i)\Delta t_i , \qquad (9.9)$$

де η – числовий коефіцієнт, що залежить від технічних характеристик детектора.

Якщо ймовірності p_i залежать від i, то очевидно, що метод одержання розподілу $P(k)$, використаний у попередньому параграфі, вже не можна застосовувати. Проте цей метод можна модифікувати так, щоб залишилася в силі й могла бути використана сама ідея попереднього розгляду, що ґрунтувалася на статистичній незалежності окремих актів детектування. Для цього змінимо інтервали Δt_i так, щоб ймовірності p_i, як і раніше, були рівними між собою. Цього можна досягти, якщо припустити, що $\Delta t_i = \text{const} \cdot I^{-1}(t_i)$.

На рис. 29 схематично зображено, як змінюється значення Δt_i залежно від $I(t_i)$.

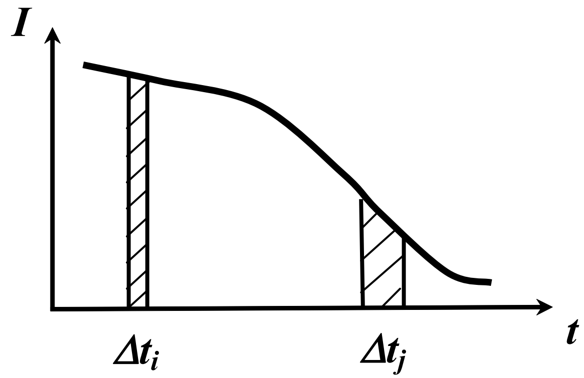

Рис. 29. Схематично зображена залежність інтенсивності випромінювання від часу. Величини інтервалів збільшуємо зі зменшенням I, так, щоб заштриховані площі були однаковими

Отже,

$$p_i = \eta \Delta t_i I(t_i) = \frac{N_0}{N} =$$
$$= \frac{\eta \int_t^{t+T} dt' I(t')}{N} = \frac{\eta T}{N} \overline{I} = \eta \overline{I} \Delta t \,, \tag{9.10}$$

де
$$\overline{I}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' I(t') \tag{9.11}$$

усереднене упродовж часу T значення інтенсивності; Δt, як і раніше, дорівнює T/N.

Оскільки ймовірності детектування фотона в різних інтервалах Δt_i стали рівними, то знаходження ймовірності детектування k фотонів за час T зводиться до випадку, який ми вже розглядали, і знову задається пуассонівським розподілом

$$P(k) = \frac{W^k}{k!} e^{-W} \,, \tag{9.12}$$

де

$$W = \eta \overline{I}(t) T \equiv N_0 \equiv \overline{n} \,. \tag{9.13}$$

Як бачимо, для нестаціонарної (але детермінованої) інтенсивності статистика фотовідліків не змінилась, змінилось лише означення середнього значення $\overline{n}$. Як видно з (9.10) та (9.13), ця величина визначається інтегралом від інтенсивності в межах інтервалу спостереження T і в загальному випадку є функцією часу t.

Складнішим, але й реалістичнішим та практично корисним виглядає випадок, коли сама інтенсивність є випадковою величиною. Тоді флуктуації фотовідліків будуть залежати від флуктуацій інтенсивності світла. Встановлення зв'язку між цими величинами дасть змогу вивчати статистичні властивості випромінювання, досліджуючи, наприклад, середні значення та флуктуації фотовідліків. Описаний далі підхід запропонував і розвинув Л. Мандель (1958–1959). Ідея Манделя стала особливо корисною для побудови квантової теорії фотодетектування. Саме у квантовому випадку неможливо задати миттєве значення інтенсивності, яка, як і будь-яка інша динамічна змінна, є оператором.

9.3. Залежність статистики фотовідліків від флуктуацій інтенсивності оптичного поля. Формула Манделя

Якщо ми не знаємо, або коли взагалі не існує детермінованої залежності $I(t)$, то ми знову не можемо описати флуктуації фотовідліків методами, запропонованими у попередніх двох параграфах. Проте можна встановити функціональний зв'язок між флуктуаціями фотовідліків та інтенсивності.

Нехай $I(t)$ – випадкова величина, проте відомі ймовірності її реалізації. Інакше кажучи, відомі ймовірності того, чи іншого її значення $p(I)$, а, отже, й $p(W)$. Вважаємо, що $p(I)$ не залежить від часу, що означає стаціонарність флуктуаційного процесу. Для різних значень випадкової змінної W можна очікувати й різну кількість зареєстрованих фотонів. Тому ймовірність реєстрації k фотонів, задану пуассонівським розподілом (9.12), треба усереднити ще й по різних реалізаціях W. Відповідний аналітичний вираз має вигляд:

$$P(k)=\left\langle \frac{W^k}{k!}e^{-W}\right\rangle =\int_0^\infty dW\frac{W^k}{k!}e^{-W}p(W), \qquad (9.14)$$

де $p(W)$ – ймовірність величини W.

Вираз (9.14) називають формулою Манделя.

Якщо флуктуації інтенсивності відсутні, тобто, якщо

$$p(W)=\delta(W-W_0),$$

то (9.14) зводиться до формули Пуассона, якою враховується дискретний характер фотонного поля та ймовірнісний характер фотоелектричного ефекту. В інших випадках потрібно знати функцію $p(W)$.

Формула Манделя дає змогу знаходити середні значення будь-яких функцій кількості відліків n:

$$\langle f(n)\rangle =\sum_n f(n)P(n)= \\ =\int_0^\infty dW\sum_n f(n)\frac{W^n}{n!}e^{-W}p(W). \qquad (9.15)$$

Зокрема, коли $f(n)=n$, то

$$\langle n\rangle =\int_0^\infty dW\sum_{n=1}\frac{W^n}{(n-1)!}e^{-W}p(W)= \\ =\int_0^\infty dWWp(W)=\langle W\rangle \qquad . \qquad (9.16)$$

Для $f(n)=n(n-1)$ одержимо:

$$\langle n(n-1)\rangle =\int_0^\infty dWW^2p(W)=\langle W^2\rangle . \qquad (9.17)$$

З виразу (9.17) можна одержати середньоквадратичне значення флуктуацій кількості відліків на детекторі:

$$\langle \delta n^2\rangle =\langle n^2\rangle -\langle n\rangle^2=\langle W\rangle +\langle W^2\rangle -\langle W\rangle^2= \\ =\langle n\rangle +\left\langle \left(W-\bar{W}\right)^2\right\rangle \equiv \langle n\rangle +\langle \delta W^2\rangle \qquad . \qquad (9.18)$$

Отже,

$$\langle \delta n^2\rangle =\langle n\rangle +\langle \delta W^2\rangle . \qquad (9.19)$$

Два члени у правій частині (9.19) мають різну фізичну природу. Перший з них називається дробовим шумом чи фундаментальним рівнем шуму (в англомовній літературі “the shot noise level”, або “the standard quantum limit”). Він пропорційний до ефективності детектора η і є наслідком дискретної природи фотоефекту. Відносна величина дробового шуму (відношення шум/сигнал) дорівнює $\left(\bar{n}/\bar{n}^2\right)=1/\bar{n}$ збільшується із зменшенням рівня сигналу, що може значно погіршувати точність вимірювань слабких сигналів. Збільшення ефективності детектора η за незмінного значення інтенсивності випромінювання зменшує вплив дробового шуму на точність вимірювань.

Другий член у правій частині (9.19) (пропорційний η^2) зумовлений флуктуаціями інтенсивності й ніколи не буває від’ємним. Наявність цього члена означає, що флуктуації фотовідліків описуються суперпуассонівською статистикою. Проте цей висновок не завжди правильний, оскільки він ґрунтується на квазікласичній теорії фотодетектування.

У наступному параграфі розглянемо загальніший підхід, а саме: квантову теорію фотодетектування. З цієї теорії буде видно, що в окремих випадках флуктуації інтенсивності дають від’ємний внесок у флуктуації фотовідліків. Формально це можна трактувати як існування від’ємної ймовірності $p(W)$. Отже, для певної категорії світлових полів (для "некласичних" станів світла) рівень флуктуацій фотовідліків може бути нижчим, ніж фундаментальний рівень, тобто меншим, ніж за пуассонівської статистики фотовідліків. Це особливо важливо для практичних застосувань оптичного випромінювання, наприклад, коли його використовують для зв'язку, одержання та передачі зображень.

Важливим є також те, що і середня кількість, і флуктуації фотовідліків залежать не тільки від властивостей джерела випромінювання, а й від флуктуаційних властивостей середовища, в якому поширюється світло. Тому, аналізуючи статистичні характеристики фотовідліків, можна досліджувати різноманітні стани та процеси і в прозорих, і в каламутних середовищах.

Формула Манделя істотно спрощується в таких практично важливих граничних випадках.

а). Припустимо, що інтервал усереднення T значно більший від часу кореляції випадкової величини – інтенсивності $I(t)$. Тоді значення W

$$W = \eta \int_t^{t+T} dt' I(t') = \eta \bar{I} T = \bar{W} \tag{9.20}$$

визначається середньою величиною інтенсивності, оскільки флуктуаційна складова під час усереднення по великому часовому проміжку прямує до нуля. Тоді функцію $p(W)$ можна замінити на $\delta(W - \bar{W})$ і рівність (9.14) зводиться до вигляду

$$P(k) = \frac{\left(\eta \bar{I} T\right)^k}{k!} e^{-\eta \bar{I} T}, \tag{9.21}$$

тобто до пуассонівського вигляду.

б). Інший граничний випадок – це, коли час кореляції інтенсивності $I(t)$ значно більший від інтервалу інтегрування T. Випадкова величина $I(t)$ майже не змінюється за час T і функцію $I(t)$ можна винести з-під знаку інтегралу в (9.20):

$$W \approx \eta I(t) T. \tag{9.22}$$

Тоді

$$P(k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty dI \left(\eta I T\right)^k e^{-\eta I T} p(I). \tag{9.23}$$

Для прикладу розглянемо теплове випромінювання, для якого у класичному значенні ймовірність $p(I) = \frac{1}{\bar{I}} e^{-I/\bar{I}}$ (див. задачу **3**). Тоді, інтегруючи в правій частині (9.23) по I, одержимо:

$$P(k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty dI \left(\eta I T\right)^k \frac{1}{\bar{I}} e^{-I(\eta T + 1/\bar{I})} =$$
$$= \frac{1}{\eta T \bar{I} \left(1 + \left(\eta T \bar{I}\right)^{-1}\right)^{k+1}}. \tag{9.24}$$

Як бачимо з (9.24), ймовірність $P(k)$ нічим не нагадує пуассонівський розподіл. Використовуючи (9.24) та загальну формулу (9.15), легко знайдемо середню кількість та середньоквадратичне значення флуктуацій кількості зареєстрованих фотонів

$$\bar{n} = \eta T \bar{I}; \quad \left\langle \delta n^2 \right\rangle = \bar{n} + \bar{n}^2, \tag{9.25}$$

що формально не відрізняється від аналогічних виразів для статистики теплового випромінювання, що знайдено в розділі 2 (рівняння (2.76) та (2.79)), де значення $\bar{n}$ означало розподіл Планка.

9.4. Квантова теорія фотодетектування

Досі ми вважали, що інтенсивність є класичною величиною. Перехід до квантовомеханічного опису здійснюється формальною заміною формули Манделя (9.14) на

$$P(k)=\left\langle \tau:\frac{\hat{W}^k}{k!}e^{-\hat{W}}:\right\rangle, \tag{9.26}$$

де символом ($\tau:...:$) позначене і часове, і нормальне впорядкування операторів. Наприклад, у випадку чотирьох операторів

$$\tau:a(t_1)a^+(t_2)a^+(t_1)a(t_2):=$$

$$=\begin{cases} a^+(t_2)a^+(t_1)a(t_1)a(t_2), & \text{якщо} \quad t_1>t_2 \\ a^+(t_1)a^+(t_2)a(t_2)a(t_1), & \text{якщо} \quad t_2>t_1\,. \end{cases} \tag{9.27}$$

Чому ймовірність $P(k)$ має вигляд (9.26), можна зрозуміти з таких міркувань. Під час одержання квазікласичного виразу (9.7) ймовірності поглинання фотонів у одному, чи в різних інтервалах вважались незалежними. У квантовому випадку ситуація інша. Після поглинання фотона квантовий стан системи змінюється (зокрема, в електромагнітному полі стає на один фотон менше). Тому в загальному випадку ймовірність поглинання фотона залежить від того, чи поглинались перед тим інші фотони. З подальшого викладу стане зрозуміло, як враховується ця обставина у квантовій теорії фотодетектування. Поглинання одного фотона в момент часу t_i описується оператором знищення $a(t_i)$. Очевидно, що в результаті елементарного акту поглинання стан системи "детектор + поле " змінився з

$|In\rangle$ (In – "initial") на $|F\rangle$ (F – "final"). Відповідний матричний елемент квантового переходу дорівнює:

$$\langle F|a(t_i)|In\rangle\,. \tag{9.28}$$

Ймовірність такого процесу пропорційна

$$\left|\langle F|a(t_i)|In\rangle\right|^2=\langle In|a^+(t_i)|F\rangle\langle F|a(t_i)|In\rangle\,. \tag{9.29}$$

Очевидно, що повна ймовірність поглинання знаходиться після сумування (9.29) по всіх кінцевих станах $|F\rangle$:

$$\begin{aligned} &Prob(1\,photon)\sim\sum_F\langle In|a^+(t_i)|F\rangle\langle F|a(t_i)|In\rangle= \\ &=\langle In|a^+(t_i)a(t_i)|In\rangle \end{aligned}\,. \tag{9.30}$$

Як бачимо, оператори у виразі (9.30) нормально впорядковані.

Якщо два фотони поглинулися в різних інтервалах Δt_i та Δt_j, то відповідний матричний елемент дорівнює:

$$\langle F|a(t_i)a(t_j)|In\rangle\text{, якщо } t_i>t_j\,,$$

та
$$\langle F|a(t_j)a(t_i)|In\rangle\text{, якщо } t_i<t_j\,, \tag{9.31}$$

і ймовірність поглинання двох фотонів дорівнює

$$Prob(2\,photons)\sim$$

$$\sim\sum_F\langle In|a^+(t_j)a^+(t_i)|F\rangle\langle F|a(t_i)a(t_j)|In\rangle=$$

$$=\langle In|a^+(t_j)a^+(t_i)a(t_i)a(t_j)|In\rangle, \tag{9.32}$$

якщо $t_i>t_j$.

Якщо ж $t_i<t_j$, то індекси i,j у попередньому виразі потрібно поміняти місцями.

У загальному випадку ймовірність поглинання двох фотонів можна записати однією формулою, використовуючи операції часового та нормального впорядкування.

Вона має вигляд:

$$Prob(2\ photons) \sim$$
$$\sim \langle In | \tau : a^+(t_j)a^+(t_i)a(t_i)a(t_j) : | In \rangle . \qquad (9.33)$$

Очевидно, що описану процедуру можна продовжити на випадок поглинання трьох, чотирьох, … фотонів. На кожному етапі задача зведеться до знаходження середніх значень впорядкованих добутків операторів. Зазначимо, що вираз (9.33) характеризує ймовірність поглинання двох фотонів у двох виділених часових інтервалах, а саме: Δt_i та Δt_j .

Щоб знайти ймовірність поглинання двох фотонів за весь час і це поглинання відбувається лише в цих інтервалах i, j , вираз під знаком впорядкування в (9.33) потрібно домножити на

$$\prod_{\alpha \neq i,j} (1 - \hat{p}_\alpha) , \qquad (9.34)$$

де індексом α нумерують всі інтервали за винятком інтервалів i, j. Оператори $1 - \hat{p}_\alpha$ та $\hat{p}_\alpha$ характеризують відповідно відсутність та наявність поглинання в інтервалі α. Як видно з попереднього розгляду, оператор $\hat{p}_\alpha$ можна записати у такому вигляді:

$$\hat{p}_\alpha = \eta \Delta t_\alpha a^+(t_\alpha)a(t_\alpha) , \qquad (9.35)$$

де $\eta \Delta t_\alpha$ означає ймовірність фотовідліку за час Δt_α в однофотонному полі.

Оскільки кількість інтервалів є великою ($N >> 1$), то

$$\prod_{\alpha \neq i,j} (1 - \hat{p}_\alpha) \approx \exp\left\{ -\sum_\alpha \eta \Delta t_\alpha a^+(t_\alpha)a(t_\alpha) \right\} \approx$$
$$\approx \exp\left\{ -\eta \int_t^{t+T} dt' a^+(t')a(t') \right\} = e^{-\hat{W}} \qquad . \qquad (9.36)$$

Очевидно, що останній вираз (9.36) не зміниться, коли характерна кількість інтервалів, в яких поглинаються фотони, істотно більша, ніж два, та при цьому залишається значно меншою, ніж N.

З врахуванням сказаного оператор, що характеризує поглинання двох фотонів, яке може відбутися у будь-якій парі інтервалів $\Delta t_i, \Delta t_j$, можна записати у вигляді:

$$\hat{P}(2) = \tau : \frac{1}{2}\eta^2 \left(\int_t^{t+T} dt' a^+(t')a(t') \right)^2 e^{-\hat{W}} :=$$
$$= \tau : \frac{1}{2}\hat{W}^2 e^{-\hat{W}} : \qquad , \qquad (9.37)$$

де дві суми по i та j замінили інтегралами.

Коефіцієнт $1/2$ враховує те, що в подвійній сумі по i, j кожний добуток $a^+(t_i)a(t_i)a^+(t_j)a(t_j)$ повторюється двічі.

Узагальненням формули (9.37) на випадок поглинання k фотонів є вираз:

$$\hat{P}(k) == \tau : \frac{1}{k!}\hat{W}^k e^{-\hat{W}} : \qquad (9.38)$$

Отже, квантовим аналогом класичної формули (9.14) є вираз

$$P(k) = \left\langle \tau : \frac{\hat{W}^k}{k!} e^{-\hat{W}} : \right\rangle = sp\left(\hat{\rho}\tau : \frac{\hat{W}^k}{k!} e^{-\hat{W}} : \right), \qquad (9.39)$$

де фізичній величині $\frac{W^k}{k!} e^{-W}$ ставиться у відповідність оператор $\tau : \frac{\hat{W}^k}{k!} e^{-\hat{W}} :$.

Усереднення по початковому стану зводиться до усереднення по оператору густини $\hat{\rho}$. Якщо оптичне поле мало впливає на стан детектора, то точний статистичний оператор усієї системи можна замінити факторизованим:

$$\hat{\rho} \approx \hat{\rho}_{field} \hat{\rho}_{\det}, \tag{9.40}$$

де $\hat{\rho}_{field}$ – статистичний оператор початкового стану поля; а $\hat{\rho}_{\det}$ – статистичний оператор детектора.

Оскільки змінні детектора входять тільки в $\hat{\rho}_{\det}$, то у формулі (9.39) можна просумувати по них і тоді ймовірність (9.39) набуде конкретнішого вигляду:

$$P(k) = sp\left(\hat{\rho}_{field} \tau : \frac{\hat{W}^k}{k!} e^{-\hat{W}} :\right). \tag{9.41}$$

Використаємо формулу (9.41) для знаходження ймовірності $P(k)$ у випадку теплового випромінювання. Для простоти розглянемо ситуацію, коли час усереднення (інтегрування) детектором (T) значно менший від часу кореляції інтенсивності $\hat{I}(t)$ ("швидкий" детектор). Тоді оператор $\hat{W}$ можна замінити на $\eta T a^+ a$, а рівноважний статистичний оператор $\hat{\rho}_{field} = C \exp\{-\alpha a^+ a\}$ зручно записати в когерентному представленні:

$$\hat{\rho}_{field} = \int d^2 v \varphi(v) \left| v \right\rangle \left\langle v \right|, \tag{9.42}$$

де вагова функція $\varphi(v) = \frac{1}{\pi n_P} e^{-|v|^2/n_P}$ (див. (8.114)).

У попередньому розділі показано, що діагональні матричні елементи $\left\langle v \right| : f(a, a^+) : \left| v \right\rangle$, де f – довільна функція операторів a, a^+, дорівнюють $f(v, v^*)$. Тоді замінюючи в (9.41) оператори a, a^+ на v, v^*, одержимо:

$$P(k) = \int d^2 v \varphi(v) \left\langle v \right| : \frac{\left(\eta T a^+ a\right)^k}{k!} e^{-\eta T a^+ a} : \left| v \right\rangle =$$

$$= \int d^2 v \varphi(v) \frac{\left(\eta T |v|^2\right)^k}{k!} e^{-\eta T |v|^2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{drr}{\pi n_P} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\left(\eta T r^2\right)^k}{k!} e^{-r^2\left(\eta T + 1/n_P\right)}, \tag{9.43}$$

де ми зробили заміну $v = re^{i\varphi}$.

Після простих обчислень одержимо:

$$P(k) = \frac{1}{\eta T n_P \left(1 + \left(\eta T n_P\right)^{-1}\right)^{k+1}}, \tag{9.44}$$

тобто такий же вираз, як і в класичному випадку (див. рівняння (9.24)). Проте цей збіг є тільки формальним, оскільки в класичному випадку ми вважали змінну I неперервною, тоді як насправді вона могла набувати лише дискретних значень, тобто власних значень оператора кількості частинок ($\hat{I} = a^+ a$).

Очевидно, що загальну формулу (9.41) можна використати для знаходження середніх значень будь-якої функції кількості відліків $\left\langle f(k) \right\rangle$. Зокрема,

$$\left\langle n \right\rangle = \left\langle \hat{W} \right\rangle; \quad \left\langle n(n-1) \right\rangle = \left\langle \tau : \hat{W}^2 : \right\rangle;$$

$$\left\langle \delta n^2 \right\rangle = \left\langle \tau : \hat{W}^2 : \right\rangle - \left\langle \hat{W} \right\rangle^2 + \left\langle \hat{W} \right\rangle. \tag{9.45}$$

Формули (9.45) є квантовими аналогами для класичних значень (9.16)–(9.18). У випадку "швидкого" детектора $\hat{W} = \eta T a^+ a$, і тоді можна легко знайти ці величини для різних станів електромагнітного випромінювання.

Далі розглянемо такі найпростіші випадки:

а). Світло знаходиться у фоківському стані $|m\rangle$.

Тоді $$\langle n\rangle = \langle m|\eta Ta^+a|m\rangle = \eta Tm\,; \tag{9.46}$$

$$\left\langle \tau : \hat{W}^2 : \right\rangle = \langle m|\eta^2T^2a^+a^+aa|m\rangle =$$

$$= \eta^2T^2\langle m|a^+a\left(a^+a-1\right)|m\rangle = \eta^2T^2m(m-1);$$

$$\left\langle \delta n^2\right\rangle = \eta Tm - \eta^2T^2m = \langle n\rangle(1-\eta T). \tag{9.47}$$

Як бачимо, середньоквадратичні флуктуації $\left\langle \delta n^2\right\rangle$ є меншими за величину дробового шуму $\eta Tm = \langle n\rangle$. Отже, флуктуації кількості фотовідліків для випромінювання у стані $|m\rangle$ описуються субпуассонівською статистикою. Цей результат принципово відрізняється від класичного виразу (9.19), з якого випливає, що флуктуації фотовідліків завжди мають бути суперпуассонівськими. Така, на перший погляд суперечлива ситуація пояснюється тим, що фоківські стани не мають класичного аналога і тому порівняння флуктуацій у згаданих випадках є некоректним.

Як видно з рівняння (9.47), у випадку ідеального детектора, тобто детектора, в якого ефективність детектування ηT дорівнює одиниці, середньоквадратичні флуктуації кількості відліків дорівнюють нулеві. Зазначимо, що рівень флуктуацій фотовідліків, нижчий від дробового шуму, вже зафіксований експериментально (див., наприклад, публікації після основного тексту розділу). Для цього, як видно з останнього виразу в (9.47), потрібні високоефективні детектори, оскільки в протилежному випадку внесок негативного члена в $\left\langle \delta n^2\right\rangle$ може стати непомітним на фоні дробового шуму.

б). Світло знаходиться в когерентному стані $|v\rangle$. Тоді

$$\langle n\rangle = \langle v|\eta Ta^+a|v\rangle = \eta T|v|^2\,; \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle \tau : \hat{W}^2 : \right\rangle = \langle v|\eta^2T^2a^+a^+aa|v\rangle = \eta^2T^2|v|^4\,;\\ &\left\langle \delta n^2\right\rangle = \eta T|v|^2 = \langle n\rangle\end{aligned}\,. \tag{9.49}$$

У цьому випадку середньоквадратичні флуктуації мають пуассонівську статистику і квантовий підхід дає таке ж значення, що і класичний. Останній ґрунтується на нескорельованому характері флуктуацій фотонних відліків: детектування окремих фотонів не впливає на ймовірність детектування інших фотонів. Така ж ситуація наявна в когерентному стані: після поглинання фотона стан поля не змінюється, оскільки когерентний стан є власним станом оператора знищення. Це знову свідчить про близькість когерентного стану до класичного.

в). Стан світла описується рівноважним розподілом.

$$\langle n\rangle = \left\langle \eta Ta^+a\right\rangle = \eta Tn_P\,. \tag{9.50}$$

$$\begin{aligned}&\left\langle \tau : \hat{W}^2 : \right\rangle = \eta^2T^2\left\langle a^+a^+aa\right\rangle = 2\left(\eta Tn_P\right)^2;\\ &\left\langle \delta n^2\right\rangle = \left(\eta Tn_P\right)^2 + \eta Tn_P\end{aligned}\,. \tag{9.51}$$

Остання формула в (9.51) вказує на суперпуассонівську статистику фотовідліків для рівноважного випромінювання і формально не відрізняється від класичного виразу (9.25), що не має дивувати, оскільки в обох випадках ймовірності $P(n)$ були однаковими (див. (9.24) та (9.44)).

Вираз для $\langle \delta n^2 \rangle$ формально подібний до виразу для флуктуацій кількості фотонів у окремій моді (2.79). Проте ці величини стають однаковими лише тоді, коли ефективність детектування дорівнює одиниці ($\eta T = 1$). При $\eta T < 1$ до флуктуацій випромінювання додаються флуктуації, зумовлені випадковим характером окремих актів детектування. В загальному випадку, щоб визначити флуктуації кількості фотонів у моді, знаючи статистику фотовідліків, потрібна додаткова процедура. Вона значно ускладнюється, коли на шляху від джерела випромінювання до детектора на фотони діє випадкова сила, зумовлена флуктуаціями показника заломлення (див., наприклад, останню публікацію в списку, де розглядаються флуктуації фотовідліків для світла, що поширюється в земній атмосфері у вигляді однофотонних імпульсів).

L. Mandel. *Fluctuations of photon beams and their correlations*. – Proc. Phys. Soc., 1958. – **72**. – P. 1037–1048.

L. Mandel. *Fluctuations of photon beams: the distribution of the photoelectrons.* – Proc. Phys. Soc., 1959. – **74**. – P. 233–243.

L. A. Wu, H. J. Kimble, J. H. Hall, and H. Wu. *Generation of squeezed states by parametric down conversion.* – Phys. Rev. Lett., 1986. – **57**. – P. 2520.

H. Henning, M. Mehmet, S. Chelkowski, B. Hage, A. Franzen, N. Lastzka, S. Gossler, K. Danzmann, and R. Schnobel. *Observation of Squeezed Light with 10-dB Quantum-Noise Reduction.* – Phys. Rev. Lett., 2008. – **100**. 033602.

P. Berman and A. Chumak. *Quantum effects of a partially coherent beam propagating through the atmosphere*. – Proc. of SPIE, 2007. – **6710**. – 67100M-1.

Задачі

1. Виходячи з розподілу Пуассона, довести, що статистика фотовідліків за великих значень $\bar{n}$ описується гаусcовим розподілом. Знайти параметри, що характеризують цей розподіл.

Розв'язок

У розподілі Пуассона $P(k) = \dfrac{\bar{n}^k}{k!} e^{-\bar{n}}$ розглядатимемо такі значення k, які перебувають не дуже далеко від максимуму кривої $P(k)$. Оскільки $\bar{n} >> 1$, то можна вважати, що і $k >> 1$. Тоді, за формулою Стірлінга, $k!$ можна апроксимувати простим виразом

$$k! \approx \sqrt{2\pi} k^{k+1/2} e^{-k}.$$

Отже,

$$P(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(k+1/2)\ln k + k + k\ln \bar{n} - \bar{n}}.$$

Вважаючи функцію, що знаходиться в показнику експоненти

$$f(k) = -(k+1/2)\ln k + k + k\ln \bar{n} - \bar{n},$$

функцією неперервної змінної k, знайдемо її максимум. Для цього прирівняємо до нуля похідну $f'(k) = 0$. Звідси знаходимо, що в точці екстремуму $k = k_m \approx \bar{n}$. Друга похідна у цій точці дорівнює $-(1/n)$. Тому в цій точці є максимум функції $f(k)$. В околі максимального значення функції $f(k)$ її можна апроксимувати виразом:

$$f(k) \approx f(k_m) - \frac{1}{2} \frac{(k-\bar{n})^2}{\bar{n}}.$$

Отже, розподіл Пуассона поблизу максимального значення можна апроксимувати гауссовою функцією

$$P(k) \approx C \exp\left\{-\frac{(k-\overline{n})^2}{2\overline{n}}\right\},$$

де константу C знаходять з умови нормування функції $P(k)$ і вона дорівнює $\frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{n}}}$. Ширина знайденого розподілу є величиною порядку $\sqrt{2\overline{n}}$, тобто значно менша від середнього значення $\overline{n}$.

2. Показати, що середнє значення та середньоквадратичні флуктуації кількості фотовідліків для класичного розподілу інтенсивності $p(I) = \frac{1}{\overline{I}} e^{-I/\overline{I}}$ задаються виразами (9.25).

Вказівка.
Використати формулу (9.24).

3. Показати, що ймовірність детектування k фотонів упродовж часу T, яка задається формулою (9.44), за великих значень $\eta T n_P, (\eta T n_P >> 1)$ описується експоненціальною залежністю: $P(k) \sim e^{-k/(\eta T n_P)}$.

4. Мода електромагнітного поля знаходиться в суперпозиційному стані

$$|\psi\rangle = \alpha_1 |n_1\rangle + \alpha_2 |n_2\rangle + \alpha_3 |n_3\rangle .$$

На який показ детектора фотонів, що має стовідсоткову ефективність, можна очікувати в результаті однократного вимірювання? Яку інформацію про поле можна одержати в результаті багатократних вимірювань, коли на початку кожного експерименту значення $|\alpha_i|$ залишаються незмінними?

5. Знайти середнє та середньоквадратичне значення кількості фотовідліків для одномодового поля, заданого хвильовою функцією

$$|\psi\rangle = \alpha |i\rangle + \beta |j\rangle,$$

де $|i\rangle, |j\rangle$ – фоківські стани.

Відома ефективність детектування: $\eta T < 1$. Обмежитись випадком “швидкого” детектора.

10. Дворівнева модель взаємодії атомів з електромагнітним полем

В останньому параграфі 7-го розділу зазначено, що в деяких практично важливих випадках точний гамільтоніан електронів у полі ядра можна замінити гамільтоніаном дворівневої системи (тобто квазіспіновим гамільтоніаном). Мова йде, насамперед, про атоми, що знаходяться в полі електромагнітної хвилі, частота якої ω збігається або дуже близька до якоїсь із частот атомних переходів. Така модель взаємодії атома з випромінюванням є прийнятною тоді, коли мікроскопічну взаємодію електрона (на виділеному рівні) з іншими електронами та ядром можна наближено врахувати, замінивши її взаємодією електрона з якимось ефективним зарядом. Очевидно, що при цьому враховується лише ефект екранування заряду ядра електронами внутрішніх оболонок.

Фізичні системи, в яких важливою складовою є дворівневий елемент, широко досліджуються в сучасній квантовій оптиці, зокрема з метою вивчення можливості створення окремих кубітів з наступним об'єднанням їх у єдину когерентну систему – квантовий комп'ютер. Нині дворівневі системи, створені з використанням надпровідних джозефсонівських контактів, вважають перспективнішими (завдяки простоті керування та масштабування), ніж системи на окремих атомах. Проте теоретичний опис процесів в обох випадках майже однаковий.

10.1. Гамільтоніан атома в полі хвилі

Електричну та магнітну складові поля хвилі можна задати векторним та скалярним потенціалами $\vec{A}(\vec{r},t)$ та $\varphi(\vec{r},t)$, використавши відомі співвідношення:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi; \quad \vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A}. \tag{10.1}$$

Оскільки довжина хвилі у випадку оптичного випромінювання значно більша від розмірів атома (останні є порядку ангстрема), то можна вважати, що поля $\vec{E}$ і $\vec{H}$, які діють на електрони атомів, майже такі ж, як і в точці, де знаходиться ядро. Для подальшого розгляду зручно помістити початок системи координат у центрі ядра і задати потенціали у такому вигляді:

$$\varphi = -\vec{E}\cdot\vec{r}, \quad \vec{A} = \frac{1}{2}\vec{H}\times\vec{r}, \tag{10.2}$$

де $\vec{E}$ і $\vec{H}$ – значення полів при $\vec{r} = 0$.

За такого вибору потенціалів ми нехтуємо внеском $\vec{A}(\vec{r},t)$ у значення електричного поля, що цілком справедливо у багатьох практично важливих випадках. Мова йде про ситуації, коли характерна довжина хвилі випромінювання λ значно більша від розмірів атома l_a. Справді, якщо врахувати, що в плоскій хвилі амплітуди полів однакові ($|H| = |E|$), то похідну $\partial\vec{A}/\partial t$ можна оцінити як $\omega\,|E|\,l_a$. Тоді відношення членів з потенціалами $\vec{A}(\vec{r},t)$ та $\varphi(\vec{r},t)$ у виразі для електричного поля (10.1) по порядку величини дорівнює $(2\pi l_a/\lambda) << 1$. Саме цю нерівність ми мали на увазі, коли задавали потенціали у вигляді (10.2).

Гамільтоніан електрона запишемо у вигляді:

$$\mathrm{H} = \frac{\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2m_e} + e\varphi + V, \qquad (10.3)$$

де $\vec{P}$ – канонічний (узагальнений) імпульс електрона; $V = V(\vec{r})$ – потенціальна енергія електрона, коли відсутнє зовнішнє поле.

Формули (10.1)–(10.3) мають однаковий вигляд і за класичного, і за квантового опису. Нагадаємо, що в останньому випадку всі фізичні величини треба замінити на відповідні оператори, зокрема $\vec{P}$ на $-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}$.

Можна показати, що коли потенціали задані у вигляді (10.2), то членом $\frac{e}{c}\vec{A}$ у круглих дужках (10.3) можна знехтувати. Для цього оцінимо лінійний по $\vec{A}$ член у гамільтоніані. Величину

$$-\vec{P}\cdot\frac{e}{m_e c}\vec{A} = i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\cdot\frac{e}{2m_e c}\vec{H}\times\vec{r}$$

можна оцінити як $\frac{\hbar|e|H}{m_e c}$.

Тут ми вважаємо, що $r \sim l_a, \frac{\partial}{\partial r} \sim l_a^{-1}$.

Член зі скалярним потенціалом по порядку величини дорівнює $|e|El_a$. Знову, враховуючи, що в плоскій хвилі $|H| = |E|$, одержимо, що відношення членів зі скалярним та векторним потенціалами за порядком величини дорівнює $2\pi l_a / l_c$, де l_c – комптонівська довжина хвилі, яка значно менша від атомних розмірів ($l_c \approx 2,4\cdot 10^{-10}$ см, див. розділ 1).

Зазначимо, що це ж відношення можна записати у іншому вигляді, а саме:

$$\frac{p}{m_e c} \sim \frac{v}{c} << 1,$$

де p та v характерні значення імпульсу та швидкості електрона, відповідно.

Отже, можна нехтувати членом з магнітним полем, якщо швидкість електрона значно менша від швидкості світла (нерелятивістське наближення).

Квадратичний по $\vec{A}$ член дасть ще менший внесок у (10.3). Тоді гамільтоніан атома в полі хвилі можна записати у вигляді:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 - \vec{d}\cdot\vec{E}, \qquad (10.4)$$

де $\mathrm{H}_0 = \frac{\vec{P}^2}{2m_e} + V(\vec{r})$, $\vec{d} = e\vec{r}$ – оператор дипольного моменту атома.

Як бачимо, лише електрична складова електромагнітного поля впливає на стан атома. Підкреслимо, що цей висновок справедливий лише тоді, коли довжина хвилі випромінювання досить велика.

Взаємодія електромагнітного поля з дворівневою системою лінійно зростає зі збільшенням дипольного моменту $\vec{d}$. Тому на практиці для ефективного керування станом системи використовуються так звані рідберговські атоми, тобто атоми, в яких хоча б один електрон перебуває у квантовому стані з великим значенням головного квантового числа n. Радіус орбіти такого електрона може досягати мікронних розмірів.

Гамільтоніан взаємодії випромінювання з атомом можна записати в іншій формі, використавши для цього калібровочну інваріантність електромагнітного поля. Останння означає, що вибір потенціалів $\vec{A}(\vec{r},t)$ та $\varphi(\vec{r},t)$ неоднозначний. Зокрема, ці потенціали можна замінити на інші, використавши співвідношення

$$\vec{A}'(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{\nabla}f,\quad \varphi'(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},\tag{10.5}$$

де f – довільна функція координат та часу.

Легко переконатись, що при такій заміні значення полів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в (10.1) залишаються незмінними. Взявши функцію f такою, щоб величина φ' дорівнювала нулеві, одержимо замість (10.3) альтернативний гамільтоніан:

$$\mathrm{H}'=\frac{\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}'\right)^2}{2m_e}+V(\vec{r})\cdot\tag{10.6}$$

Коли $\varphi'=0$, то векторний потенціал $\vec{A}'(\vec{r},t)$ можна виразити лише через електричне поле $\vec{E}(\vec{r},t)$, використавши співвідношення:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial A'(\vec{r},t)}{\partial t}.\tag{10.7}$$

Як і раніше, вважаємо, що електричне поле майже не змінюється на довжинах, порядку атомних (l_a) і тому можна знехтувати залежністю $\vec{E}$ та $\vec{A}'$ від $\vec{r}$. При цьому магнітне поле автоматично дорівнює нулеві (див. друге рівняння в (10.1)). Проте ця обставина не є суттєвою, оскільки ми вже переконались, що в нерелятивістському наближенні впливом магнітного поля хвилі на рух електрона в полі атома взагалі можна знехтувати.

Якщо зовнішнє поле задане у вигляді монохроматичної хвилі $\vec{E}=\vec{\varepsilon}\cos(\omega t)$, то

$$\vec{A}'(t)=-\frac{c\vec{\varepsilon}}{\omega}\sin(\omega t)\tag{10.8}$$

і гамільтоніан атома в лінійному наближенні по $\vec{\varepsilon}$ набуває вигляду:

$$\mathrm{H}'=\mathrm{H}_0+\frac{e\vec{P}\vec{\varepsilon}}{m_e\omega}\sin(\omega t)\ ,\tag{10.9}$$

який істотно відрізняється від (10.4). Істотно різними будуть і оператори швидкості у цих двох випадках:

$$\dot{\vec{r}}=\frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r},\mathrm{H}\right]=-i\frac{\hbar}{m_e}\frac{\partial}{\partial\vec{r}},$$

$$\dot{\vec{r}}=\frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r},\mathrm{H}'\right]=\frac{1}{m_e}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}-\frac{e}{c}\vec{A}'\right]=$$

$$=\frac{1}{m_e}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+\frac{e\vec{\varepsilon}}{\omega}\sin(\omega t)\right],\tag{10.10}$$

де для $\vec{A}'$ ми використали вираз (10.8). Проте немає підстав сподіватись, що буде різниця в значеннях якихось спостережуваних величин. Річ у тім, що зі зміною гамільтоніанів змінюються і хвильові функції. Між хвильовими функціями $\left|\psi'(t)\right\rangle$, що задовольняють рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (10.6)

$$i\hbar\partial_t\left|\psi'(t)\right\rangle = \mathrm{H}'\left|\psi'(t)\right\rangle, \qquad (10.11)$$

та розв'язками рівняння Шредінгера, де гамільтоніан задається виразом (10.4), існує простий зв'язок, який задається виразом:

$$\left|\psi'(t)\right\rangle = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\vec{r}\vec{A}'(t)\right\}\left|\psi(t)\right\rangle \equiv U(t)\left|\psi(t)\right\rangle, \qquad (10.12)$$

де $U(t)$ – унітарний оператор; $\vec{A}'(t)$ задовольняє умові (10.7).

Щоб перевірити останню рівність, підставимо (10.12) в (10.11). Взявши похідну по часу, помножимо обидві частини (10.12) на $U^{-1}(t)$:

$$i\hbar\partial_t\left|\psi(t)\right\rangle = \left[U^{-1}\mathrm{H}'U - \vec{d}\vec{E}\right]\left|\psi(t)\right\rangle. \qquad (10.13)$$

Використовуючи теорему про операторний розклад (див. формулу (7.4)), легко переконатись, що $U^{-1}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}'\right)U = \vec{P}$. Звідси випливає, що оператор H', заданий виразом (10.6), після унітарного перетворення змінюється на H_0:

$$U^{-1}\mathrm{H}'U = \frac{P^2}{2m_e} + V(\vec{r}) = \mathrm{H}_0. \qquad (10.14)$$

Отже, гамільтоніан у (10.13) (вираз у квадратних дужках) дорівнює:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 - \vec{d}\cdot\vec{E},$$

тобто збігається з гамільтоніаном (10.4). Якщо $\left|\psi(t)\right\rangle$ є розв'язком рівняння Шредінгера з гамільтоніаном (10.4), то

$\left|\psi'(t)\right\rangle$ є розв'язком рівняння Шредінгера (10.11). Функції $\left|\psi'(t)\right\rangle$ та $\left|\psi(t)\right\rangle$ відрізняються фазовим множником $U(t)$ (див. співвідношення (10.12)). У результаті зміни калібровки електромагнітного поля змінюється і хвильова функція, і оператори фізичних величин. Цю обставину потрібно враховувати, щоб запобігти суперечностям за різних способів опису системи (коли використовуються різні гамільтоніани H та H'). Можна переконатись, що обидва підходи дають однаковий результат для середнього значення оператора швидкості $\dot{\vec{r}}$ (задача **1**).

Також однаковими є ймовірності знайти електрон у якійсь точці $\vec{r}$: $\left|\psi(\vec{r},t)\right|^2 = \left|\psi'(\vec{r},t)\right|^2$. Ці два приклади ілюструють еквівалентність обох підходів.

Далі використовуватимемо гамільтоніан у формі (10.4).

10.2. Осциляції Рабі дворівневої системи у випадку монохроматичного класичного випромінювання

Як зазначено вище, дворівневу модель можна використати для опису взаємодії випромінювання з атомом, якщо частота переходу $\omega_a = \frac{1}{\hbar}(E_1 - E_0)$ між двома рівнями $|1\rangle, |0\rangle$ близька до частоти поля ω. Хвильові функції $|1\rangle, |0\rangle$ є власними функціями незбуреного гамільтоніана H_0:

$$\mathrm{H}_0|1\rangle = E_1|1\rangle, \quad \mathrm{H}_0|0\rangle = E_0|0\rangle. \qquad (10.15)$$

Знайдемо, як залежить стан системи від зовнішнього поля. Розглядаючи дві хвильові функції $|1\rangle, |0\rangle$ як базис, запишемо повний гамільтоніан у вигляді:

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 - \vec{d}\vec{E} = -\frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z - G_{01}|0\rangle\langle 1| - G_{10}|1\rangle\langle 0|, \quad (10.16)$$

де член, в який входить оператор $\hat{\sigma}_z$, був одержаний у сьомому розділі, рівняння (7.36), а коефіцієнти G_{ij} задаються матричними елементами дипольної взаємодії атома з полем: $G_{ij} = \langle i|\vec{d}\vec{E}|j\rangle = \langle j|\vec{d}\vec{E}|i\rangle^*$; індексами $i, j = 0{,}1$ нумерують два базові стани.

У виразі (10.16) відсутній внесок членів з діагональними матричними елементами $\langle 0|\vec{d}|0\rangle = \langle 1|\vec{d}|1\rangle$ (вважаємо, що дипольний момент атома в станах $|0\rangle, |1\rangle$ дорівнює нулеві). Така ситуація реалізується для станів із заданою парністю. Також вважатимемо, що коефіцієнти G_{ij} є дійсними величинами, тобто: $G_{01} = G_{01}^* = G$.

Тоді гамільтоніан (10.16) набуває вигляду:

$$\mathrm{H} = -\frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z - G\hat{\sigma}_x, \quad (10.17)$$

де оператор $\hat{\sigma}_x$ задається відповідною матрицею Паулі (див. рівняння (7.47)). Подальший розгляд істотно не зміниться, якщо G_{ij} мають уявну складову (див. задачу **2**).

Вважаємо, як і раніше, що зовнішнє поле є монохроматичним:

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon}\cos(\omega t).$$

Тоді коефіцієнт G можна записати у вигляді:

$$G = \Gamma\cos(\omega t),$$

де $\Gamma = \langle 0|\vec{d}\vec{\varepsilon}|1\rangle$.

Стан дворівневої системи в електромагнітному полі задається хвильовою функцією $|\psi(t)\rangle$, що є розв'язком рівняння Шредінгера:

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \mathrm{H}|\psi(t)\rangle. \quad (10.18)$$

У базисі дворівневої системи хвильова функція має вигляд:

$$|\psi(t)\rangle = C_0(t)e^{i\omega_a t/2}|0\rangle + C_1(t)e^{-i\omega_a t/2}|1\rangle. \quad (10.19)$$

Підставимо вираз (10.19) у рівняння (10.18) і спроектуємо одержану рівність на стан $|0\rangle$, домноживши обидві її частини зліва на $\langle 0|$. Так само виконаємо проектування на стан $|1\rangle$. У підсумку одержимо систему двох диференціальних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $C_0(t), C_1(t)$:

$$\dot{C}_0 = \frac{i}{\hbar}\Gamma\cos(\omega t)e^{-i\omega_a t}C_1$$

$$\dot{C}_1 = \frac{i}{\hbar}\Gamma\cos(\omega t)e^{i\omega_a t}C_0. \quad (10.20)$$

Під час одержання рівнянь (10.20) ми врахували співвідношення:

$$\hat{\sigma}_z|0\rangle = |0\rangle,\ \hat{\sigma}_z|1\rangle = -|1\rangle,$$

$$\hat{\sigma}_x|0\rangle = |1\rangle,\ \hat{\sigma}_x|1\rangle = |0\rangle.$$

Коефіцієнти при $C_{0,1}$ у правих частинах (10.20) залежать від часу. Ці залежності часто замінюють на прості експоненціальні множники. Щоб зрозуміти суть такого наближення, представимо добуток $\cos(\omega t)e^{-i\omega_a t}$ у вигляді суми:

$$\frac{1}{2}e^{i(\omega-\omega_a)t} + \frac{1}{2}e^{-i(\omega+\omega_a)t}.$$

Перший доданок є функцією, що значно повільніше змінюється з часом, ніж другий, оскільки $|\omega-\omega_a|<<\omega,\omega_a$. Тоді, припускаючи, що стан системи також повільно змінюється з часом унаслідок дії поля хвилі (вважаємо поле слабким), можна знехтувати швидко осцилюючим членом $\frac{1}{2}e^{-i(\omega+\omega_a)t}$. Аналогічні міркування стосуються множника $\cos(\omega t)e^{i\omega_a t}$ у другому рівнянні (10.20). Такий наближений підхід, коли нехтують швидко осцилюючими членами, дістав назву наближення хвиль, що обертаються (“rotating wave approximation”, RWA). Таке наближення є справедливим, коли $\frac{|\omega-\omega_a|}{|\omega+\omega_a|}<<1$.

Зробивши спрощення, систему рівнянь (10.20), перепишемо у вигляді:

$$\dot{C}_0=\frac{i}{2\hbar}\Gamma e^{-i\Delta t}C_1$$

$$\dot{C}_1=\frac{i}{2\hbar}\Gamma e^{i\Delta t}C_0, \tag{10.21}$$

де $\Delta=\omega_a-\omega$.

Беручи похідну по часу від обох частин другого рівняння (10.21) та підставляючи значення $\dot{C}_0$ з першого рівняння, одержимо для $C_1(t)$ диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами:

$$\ddot{C}_1-i\Delta\dot{C}_1+\frac{\Gamma^2}{4\hbar^2}C_1=0. \tag{10.22}$$

Шукатимемо розв’язок (10.22) у вигляді $C_1\sim e^{i\lambda t}$. Два можливі значення λ задаються виразом:

$$\lambda_\pm=\frac{1}{2}\left(\Delta\pm\sqrt{\Delta^2+\Gamma^2/\hbar^2}\right), \tag{10.23}$$

а загальний розв’язок рівняння (10.22) має вигляд:

$$C_1(t)=C_+e^{i\lambda_+t}+C_-e^{i\lambda_-t}. \tag{10.24}$$

Константи $C_\pm$ залежать від початкових умов.

Якщо в момент часу $t=0$ атом знаходиться на нижньому рівні $|0\rangle$, то

$$C_0(t)=e^{-i\Delta t/2}\left(\cos(\Omega_R t/2)+i\frac{\Delta}{\Omega_R}\sin(\Omega_R t/2)\right)$$

$$C_1(t)=e^{i\Delta t/2}\frac{i\Gamma}{\hbar\Omega_R}\sin(\Omega_R t/2), \tag{10.25}$$

де $\Omega_R=\sqrt{\Delta^2+\Gamma^2/\hbar^2}$ – величина, яку називають частотою Рабі.

Ймовірність знайти атом у стані $|1\rangle$ в момент t дорівнює

$$P_1(t)=|C_1|^2=\frac{\Gamma^2}{\hbar^2\Omega_R^2}\sin^2\left(\Omega_R t/2\right). \tag{10.26}$$

З рівняння (10.26) видно, що ймовірність P_1 є осцилюючою функцією, де відповідна частота дорівнює Ω_R, а середнє значення P_1 дорівнює $\frac{\Gamma^2}{2\hbar^2\Omega_R^2}$. Амплітуда осциляцій зростає до значення $1/2$, коли $\Gamma>>\hbar|\Delta|$. У цьому випадку середнє по часу значення P_1 також дорівнює $1/2$. Це означає, що ймовірність знайти систему у верхньому стані така ж, як і в нижньому.

З результатів цього параграфа видно, що імпульси електромагнітного поля певної амплітуди, частоти та тривалості змінюють населеності рівнів. Імпульси, які переводять систему із нижнього стану $|0\rangle$ у суперпозиційний стан $\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right)/\sqrt{2}$, мають назву $\pi/2$-імпульсів. Відповідно, перехід $|0\rangle \to |1\rangle$ здійснюється за допомогою π-імпульсу.

Зміни станів дворівневої системи, зумовлені дією зовнішнього поля, широко використовують для досліджень. Якщо у стані, утвореному після подачі-імпульсу, фаза змінюється з часом ($\varphi \equiv \varphi(t)$), то в загальному випадку дія наступного ($-\pi/2$) імпульсу не повертає систему до початкового стану. За зміною стану після двох таких імпульсів можна вивчати процеси хаотизації фази, тобто явище дефазування (“decoherence”), яке є наслідком дії на систему випадкових полів. Зазначимо, що час дефазування є одним із найважливіших параметрів кубіта, що характеризує ефективність його функціонування як елемента “пам’яті” у квантових комп’ютерах.

У наступному параграфі показано, що на стан дворівневої системи може впливати навіть вакуумне поле. Зокрема, відбуваються осциляції Рабі, зумовлені взаємодією з нульовими коливаннями вакууму (vacuum-induced Rabi oscillations).

10.3. Взаємодія дворівневої системи з квантованим електромагнітним випромінюванням. Гамільтоніан Джейнса–Каммінгса

Після заміни класичного поля на операторну величину

$$E = \varepsilon_0(a + a^+), \tag{10.27}$$

гамільтоніан набуває вигляду:

$$\mathrm{H} = -\frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \hbar g\hat{\sigma}_x(a + a^+). \tag{10.28}$$

Тут другий член у правій частині – гамільтоніан одномодового поля. Це може бути гамільтоніан резонатора (див. задачу **1** розділу **2**).

Третій член – це гамільтоніан “спін”-фотонної взаємодії з відповідною константою $\hbar g = -\varepsilon_0\langle i|d|j\rangle$; d –компонента диполя вздовж поля $\vec{E}$. Для подальшого розгляду корисно записати оператор $\hat{\sigma}_x$ у вигляді

$$\hat{\sigma}_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv \hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$$

(див. рівняння (7.48)). Тоді добуток $\hat{\sigma}_x(a + a^+)$ можна записати як суму чотирьох членів:

$$\hat{\sigma}_x(a + a^+) = \hat{\sigma}_+a^+ + \hat{\sigma}_-a + \hat{\sigma}_+a + \hat{\sigma}_-a^+ .$$

Якщо знехтувати слабкою взаємодією поля з атомом, то залежність від часу гейзенбергівських операторів $\hat{\sigma}_+(t)$ та $\hat{\sigma}_-(t)$ задається виразами $\sigma_\pm(t) = \sigma_\pm(0)e^{\mp i\omega_a t}$ (див. задачу **7** розділу **7**). Оператори $a^+(t)$ та $a(t)$ у цьому ж наближенні дорівнюють $a^+(t) = e^{i\omega t}a^+(0), a(t) = e^{-i\omega t}a(0)$. Можна вважати, що добутки операторів $a^+\sigma_+, a\sigma_-$ є функціями, що плавно змінюються з часом, коли різниця частот $|\omega - \omega_a|$ є малою порівняно з ω, ω_a. Водночас інші два добутки операторів $\hat{\sigma}_+a, \hat{\sigma}_-a^+$ є швидкозмінними величинами. Нехтуючи, як і в попередньому параграфі, такими членами, одержимо гамільтоніан у вигляді:

$$\mathrm{H} = -\frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \hbar g\left(a^+\hat{\sigma}_+ + a\hat{\sigma}_-\right). \quad (10.29)$$

Наближення, зроблене під час переходу від (10.28) до (10.29), відповідає наближенню хвиль, що обертаються. Вираз у правій частині (10.29) має назву гамільтоніана Джейнса-Каммінґса (Jaynes-Cummings Hamiltonian). Аналогічний вигляд має гамільтоніан квантового кубіта на джозефсонівських контактах, який взаємодіє з полем резонатора. Члени, пропорційні g, описують взаємодію такого типу, за якої не змінюється сумарна кількість квантів поля та дворівневої системи. У цьому можна переконатись, врахувавши, що оператор $\hat{\sigma}_+$ переводить дворівневу систему із верхнього стану в нижній (див. формулу (7.50)), а оператор a^+ збільшує кількість фотонів на одиницю. Інша пара операторів ($\hat{\sigma}_-$ та a) діє у зворотному напрямку, зновутаки не змінюючи загальної кількості збуджень. Такий висновок можна зробити з факту комутації оператора повної кількості збуджень

$$\hat{N}_{total} = a^+a + |1\rangle\langle 1| \equiv a^+a + \frac{1}{2}(1 - \hat{\sigma}_z), \quad (10.30)$$

з гамільтоніаном (10.29). Остання рівність у (10.30) записана з врахуванням тотожності:

$$|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}(1 - \hat{\sigma}_z). \quad (10.31)$$

Тоді, оскільки

$$\left[a^+a, \mathrm{H}\right] = \hbar g\left(a^+\hat{\sigma}_+ - a\hat{\sigma}_-\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[(1 - \hat{\sigma}_z), \mathrm{H}\right] = -\hbar g\left(a^+\hat{\sigma}_+ - a\hat{\sigma}_-\right),$$

то $\left[\hat{N}_{total}, \mathrm{H}\right] = 0$.

Отже, оператор $\hat{N}_{total}$ є інтегралом руху в системі, що описується гамільтоніаном (10.29):

$$\frac{\partial \hat{N}_{total}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{N}_{total}, \mathrm{H}\right] = 0. \quad (10.32)$$

Коли взаємодія відсутня ($g = 0$), то власними функціями незбуреного гамільтоніана

$$\mathrm{H}_{ar} = -\frac{\hbar\omega_a}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

будуть дві множини станів $|0_a\rangle|n\rangle$ та $|1_a\rangle|n\rangle$, що відповідають двом послідовностям еквідистантних енергетичних рівнів

$$E_{0,n} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

$$E_{1,n} = \frac{1}{2}\hbar\omega_a + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (10.33)$$

зображених схематично на рис. 30. Тут $|n\rangle$ – n-фотонний фоківський стан резонатора. Щоб позначення дворівневих станів відрізнялись від позначень станів резонатора, ми додатково позначаємо перші нижнім індексом a.

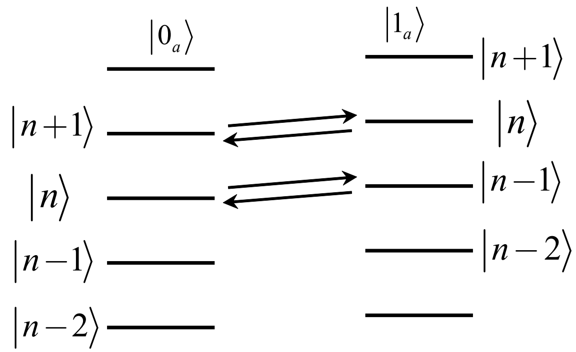

Рис. 30. Власні значення гамільтоніана H_{ar}, в якому знехтувано взаємодію. Ліва колонка показує рівні $|0_a\rangle|n\rangle$; права – рівні $|1_a\rangle|n\rangle$. Стрілками зображено пари станів, суперпозиції яких утворюють власні стани повного гамільтоніана (10.29)

Коли врахувати взаємодію, то згадані функції більше не є власними станами системи. Оператор взаємодії "переплутує" хвильові функції найближчих рівнів $|0_a\rangle|n\rangle$ та $|1_a\rangle|n-1\rangle$, $|0_a\rangle|n+1\rangle$ та $|1_a\rangle|n\rangle$, … Але з кожної такої пари можна побудувати два суперпозиційні стани, які будуть власними станами повного гамільтоніана. Винятком є найнижчий стан $|0_a\rangle|0\rangle$, для якого не існує близького за енергією стану у правій частині рис. 30. Але саме цей стан є власним станом гамільтоніана (10.29). У цьому легко переконатись, оскільки $a^+\hat{\sigma}_+|0_a\rangle|0\rangle = a\hat{\sigma}_-|0_a\rangle|0\rangle = 0$, (див. рівняння (7.51)). Тоді з явного виразу (10.29) одержимо, що власне значення найнижчого стану дорівнює

$\hbar(\omega-\omega_a)/2$.

Щоб знайти суперпозиційні стани, запишемо для них загальний вираз:

$$|\psi\rangle = \alpha|1_a\rangle|n\rangle + \beta|0_a\rangle|n+1\rangle. \qquad (10.34)$$

Коефіцієнти α та β мають бути такими, щоб виконувалась рівність

$$\mathrm{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle. \qquad (10.35)$$

Підставивши (10.34) у (10.35), одержимо два лінійні рівняння для знаходження невідомих α та β:

$$\left[\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)+\hbar\frac{\omega_a}{2}-E\right]\alpha+\hbar g\sqrt{n+1}\beta=0$$

$$\hbar g\sqrt{n+1}\alpha+\left[\hbar\omega\left(n+\frac{3}{2}\right)-\hbar\frac{\omega_a}{2}-E\right]\beta=0. \qquad (10.36)$$

Нетривіальний розв'язок рівнянь (10.36) існує, коли значення енергії дорівнюють

$$E=E_{n\pm}=\hbar\omega(n+1)\pm\frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2+4g^2(n+1)}. \qquad (10.37)$$

Коефіцієнти α та β пов'язані співвідношеннями (10.36) та умовою нормування $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$. Їх можна взяти у вигляді:

$$\alpha_{n,+}=\cos\frac{\theta_n}{2},\ \beta_{n,+}=\sin\frac{\theta_n}{2},$$

$$\alpha_{n,-}=-\sin\frac{\theta_n}{2},\ \beta_{n,-}=\cos\frac{\theta_n}{2}, \qquad (10.38)$$

де $\theta_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{2g\sqrt{n+1}}{\Delta}\right)$.

Дві пари величин $\alpha_{n,\pm}$ та $\beta_{n,\pm}$ відповідають двом різним значенням енергії $E_{n,\pm}$. Видно, що за такого вибору коефіцієнтів задовольняється рівняння (10.35) та виконується умова нормування хвильової функції. Стани

$$|n,+\rangle = \cos\frac{\theta_n}{2}|1_a\rangle|n\rangle + \sin\frac{\theta_n}{2}|0_a\rangle|n+1\rangle$$

$$|n,-\rangle = -\sin\frac{\theta_n}{2}|1_a\rangle|n\rangle + \cos\frac{\theta_n}{2}|0_a\rangle|n+1\rangle \qquad (10.39)$$

мають назву “одягнутих” станів, оскільки на відміну від хвильових функцій $|1_a\rangle|n\rangle$ та $|0_a\rangle|n\rangle$, у (10.39) врахована взаємодія дворівневої системи та резонатора. У випадку, коли частоти резонатора і дворівневої системи однакові ($\Delta = 0$), то значення θ_n можна взяти рівними $\pi/2$ і тоді вагові внески “неодягнутих” станів у правих частинах (10.39) будуть однаковими. У цьому конкретному випадку можна легко дослідити динаміку Рабі і порівняти її з квазікласичним випадком, розглянутим вище.

Нехай, як і раніше, в початковий момент часу дворівнева система знаходиться в стані $|0_a\rangle$. Вважатимемо, що в цей же момент резонатор знаходиться в стані $|n+1\rangle$.

Отже, початковий стан всієї системи має вигляд:

$$|\psi(t=0)\rangle = |0_a\rangle|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n,+\rangle + |n,-\rangle\right). \qquad (10.40)$$

Значення хвильової функції $|\psi\rangle$ у момент часу t визначається оператором еволюції $U_{evol} = e^{-i\mathrm{H}t/\hbar}$:

$$|\psi(t)\rangle = U_{evol}|\psi(0)\rangle. \qquad (10.41)$$

Підставляючи (10.40) у (10.41) і враховуючи, що

$$\mathrm{H}|n,\pm\rangle = E_{n,\pm}|n,\pm\rangle \equiv \hbar\omega(n+1) \pm \hbar\,|\,g\,|\sqrt{n+1},$$

одержимо:

$$|\psi(t)\rangle =$$
$$= e^{-i\omega(n+1)t}\left(\cos\frac{\Omega_n t}{2}|0_a\rangle|n+1\rangle - i\sin\frac{\Omega_n t}{2}|1_a\rangle|n\rangle\right), \qquad (10.42)$$

де величину $\Omega_n = 2g\sqrt{n+1}$ називають квантовою частотою Рабі.

Ймовірність знайти дворівневу систему в стані $|1_a\rangle$ дорівнює

$$P_1(t) = \sin^2\frac{\Omega_n t}{2}. \qquad (10.43)$$

Вираз (10.43) є квантовим аналогом формули (10.26) для випадку $\omega = \omega_a$. Як і в квазікласичному випадку, система осцилює довкола середнього значення $P_1 = 1/2$. Частота осциляцій дорівнює Ω_n. Якщо в початковий момент дворівнева система знаходилась у збудженому стані $|1_a\rangle$, а резонатор у вакуумному $|0\rangle$, то осциляції Рабі знову відбуватимуться. Енергія збудження з часом перейде в резонатор, далі назад, і процес повторюватиметься з частотою $\Omega_{n=0} = 2g$. У літературі такі коливання назвали осциляціями Рабі, індукованими вакуумом.

10.4. Ефективний гамільтоніан. Штарківький та лембівський зсуви рівнів

Під час вимірювання станів квантових кубітів часто використовують так званий дисперсійний режим, коли

$$\Delta^2 >> 4g^2(\overline{n}+1), \qquad (10.44)$$

де $\overline{n}$ – характерні значення кількості фотонів у резонаторі.

Нерівність (10.44) означає, що різниця між частотою переходу та частотою резонатора ($|\Delta|$) значно перевищує характерну енергію взаємодії резонатора з дворівневою системою, поділену на постійну Планка $\hbar$. У цьому випадку значення квадратного кореня в (10.37) можна апроксимувати виразом

$$\hbar|\Delta|\left(1+\frac{2g^2(n+1)}{\Delta^2}\right),$$

і тоді два значення енергії $E_{n,\pm}$ набувають вигляду:

$$E_{n,\pm} = \hbar\omega(n+1) \pm \left(\hbar\frac{\Delta}{2} + \frac{\hbar g^2}{\Delta}(n+1)\right), \qquad (10.45)$$

де для конкретності ми припустили, що $\omega_a > \omega$, тобто $\Delta > 0$.

Вираз (10.45) можна переписати в іншому вигляді:

$$E_{n,+} = \hbar\left(\omega + \frac{g^2}{\Delta}\right)n + \frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{g^2}{\Delta}\right) + \frac{\hbar}{2}\left(\omega + \frac{g^2}{\Delta}\right)$$

$$E_{n,-} = \hbar\left(\omega - \frac{g^2}{\Delta}\right)(n+1) - \\ -\frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{g^2}{\Delta}\right) + \frac{\hbar}{2}\left(\omega + \frac{g^2}{\Delta}\right). \qquad (10.46)$$

Останні члени у виразах (10.46) є однаковими для всіх рівнів і не залежать від n. Очевидно, що їх можна опустити. При цьому відстані між окремими рівнями залишаються незмінними.

Введемо новий гамільтоніан:

$$\tilde{\mathrm{H}} = \hbar\left(\omega - \frac{g^2}{\Delta}\hat{\sigma}_z\right)a^+a - \frac{\hbar}{2}\left(\omega_a + \frac{g^2}{\Delta}\right)\hat{\sigma}_z. \qquad (10.47)$$

Спектр власних значень (10.47) збігається з множиною (10.46), якщо не враховувати неістотні постійні члени. Гамільтоніан (10.47) називають ефективним гамільтоніаном. У тих же наближеннях, що і раніше, вираз (10.47) можна одержати за допомогою формальної процедури. Для цього використовується унітарне перетворення гамільтоніану (10.29): $\tilde{\tilde{\mathrm{H}}} = U\mathrm{H}U^{-1}$. Тут оператор U має вигляд:

$$U = e^{-\frac{g}{\Delta}\left(a^+\hat{\sigma}_+ - a\hat{\sigma}_-\right)}. \qquad (10.48)$$

Можна легко переконатись, що після розкладу $\tilde{\tilde{\mathrm{H}}}$ по малому параметру g/Δ з точністю до квадратичних членів âêëþ÷í î , ñï ðàâäæóºòüñÿ ð³âí ³ñòü (çàäà÷à **3**):

$$\tilde{\tilde{\mathrm{H}}} = \tilde{\mathrm{H}}.$$

У (10.47) відсутні оператори, що описують взаємодію дворівневої системи з резонатором. Проте частота переходу (член в останніх дужках (10.47)) збільшилась на величину g^2/Δ і стала залежною від константи взаємодії g в гамільтоніані Джейнса–Каммінгса (10.29) (з якого і був одержаний вираз (10.47)). Одночасно ефективна частота резонатора також змінилась і стала дорівнювати $\omega - \frac{g^2}{\Delta}\hat{\sigma}_z$.

Вона набуває двох різних значень $\omega \mp \frac{g^2}{\Delta}$ залежно від стану дворівневої системи: знак (–) для основного стану, знак (+) – для збудженого. Цю обставину було використано для створення так званого "неруйнівного" (nondemolition, nondestructive) методу вимірювання стану дворівневої системи (див., наприклад, праці Валрафа та інш.). У процесі вимірювання із зовнішнього джерела на резонатор подають електромагнітне поле, частота якого близька до ω. Фаза відбитого сигналу залежить від ефективної частоти резонатора $\omega \mp \frac{g^2}{\Delta}$, тобто від стану дворівневої системи. Вимірювання фази відбитого сигналу дає змогу визначити стан дворівневої системи.

Можна по-іншому інтерпретувати член у гамільтоніані (10.47), пропорційний $\hat{\sigma}_z a^+ a$. Можна вважати, що ним враховано зміну відстані між основним та збудженим станами дворівневої системи, зумовлену її взаємодією з електромагнітним полем резонатора. Це легко побачити, якщо переписати гамільтоніан (10.47) у іншому вигляді:

$$\tilde{\mathrm{H}} = \hbar\omega a^+ a - \frac{\hbar}{2}\left[\omega_a + \frac{2g^2}{\Delta}\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)\right]\hat{\sigma}_z . \qquad (10.49)$$

Один із членів у квадратних дужках є пропорційним до оператора кількості фотонів $a^+ a$. Відповідна зміна відстані між рівнями кубіта є нічим іншим, ніж штарківським зсувом атомних рівнів. Подібне збільшення частоти ω_a на постійну g^2/Δ є лембівським зсувом, тобто зсувом, зумовленим взаємодією дворівневої системи з вакуумним полем резонатора. На відміну від ефекту Штарка лембівський зсув не залежить від кількості фотонів у резонаторі.

Обидва ефекти можна дослідити, діючи безпосередньо (а не через резонатор) на дворівневу систему зовнішнім

електромагнітним полем. Резонансні умови залежать від кількості фотонів $a^+ a$ у резонаторі. Як видно з рівняння (10.49), зміна кількості фотонів на одиницю призводить до зміни частоти переходу кубіта на $2g^2/\Delta$.

Сучасні експериментальні методи дають змогу виявити такі зміни частоти і так досліджувати статистичні властивості фотонного газу в резонаторі навіть тоді, коли там є лише кілька фотонів. Характерні частоти останніх можуть знаходитись у мікрохвильовому діапазоні, тобто дорівнювати кільком гігагерцам. Це значення майже на шість порядків менше від частот видимого діапазону. Щоб уникнути неконтрольованого впливу теплових фотонів (з такими ж частотами) на результати вимірювань, робочі об'єми установок охолоджують до дуже низьких температур – порядку десяти мілікельвін. До того ж, потрібна ізоляція системи від фотонів "зовнішнього світу".

Отже, досліджуючи реакцію дворівневої системи на пряму дію електромагнітного поля, можна визначити кількість фотонів у резонаторі. Метод є настільки чутливим, що дає змогу реєструвати окремі фотони. Він уже знайшов практичне застосування (див. працю Гоука та інш.).

A. Wallraff *at al. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics*. – Nature, 2004. – **431**. – P. 162–167.

A. Wallraff *at al. Approaching unit visibility for control of a superconducting qubit with dispersive readout.* – Phys. Rev. Lett., 2005. – **95**. 060501.

A. A. Houck *at al., Generating single microwave photons in a circuit.* – Nature, 2007. – **449**. – P. 328–331.

G. P. Berman and A. A. Chumak. *Influence of external fields and environment on the dynamics of a phase-qubit–resonator system.* – Phys. Rev. A, 2011. – **83**. 042322.

Задачі

1. Показати, що середні значення оператора швидкості в системах, що описуються гамільтоніанами H та H', однакові, коли квантові стани $|\psi\rangle$ та $|\psi'\rangle$ пов'язані співвідношенням (10.12).

2. Виразити останні два члени в гамільтоніані (10.16) через матриці Паулі $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ у випадку, якщо $G_{01} \neq G_{01}^*$.

Вказівка.

Використати тотожності: $\hat{\sigma}_+ = |0\rangle\langle 1|$, $\hat{\sigma}_- = |1\rangle\langle 0|$.

3. Одержати гамільтоніан (10.47), розкладаючи U (див. вираз (10.48)) по малому параметру g/Δ.

Вказівка.

Щоб спростити обчислення, доцільно врахувати умову збереження кількості збуджень у системі (рівняння (10.32)):

$$\left[\hat{N}_{total}, \mathrm{H}\right] = 0 .$$

11. Кореляційна інтерферометрія

Якщо ми досліджуємо джерело випромінювання по самому випромінюванню, то цілком логічним є проведення оптичних досліджень так, щоб мінімізувати вплив зовнішніх чинників на сигнал, що реєструється. Виходячи саме з таких міркувань, обсерваторії розташовують у горах, де вплив атмосферних забруднень та флуктуацій показника заломлення на світло, що надходить від космічних об'єктів, істотно зменшується. Деколи обсерваторії розміщують у космосі. Наприклад, телескоп Хаббл (Hubble), який виведено на довколаземну орбіту 1990 року, функціонує й досі. Проте нині уже існують технології, що дають змогу виявити та відокремити негативний вплив атмосфери на випромінювання. Їхнє використання значно зменшує матеріальні затрати на проведення досліджень.

Якщо на ранніх етапах астрономічних спостережень окремі об'єкти характеризували, переважно, інтенсивністю свічення, то згодом досліджували вже і спектральний склад випромінювання, і інтерференційні (кореляційні) характеристики полів та їхніх інтенсивностей. Про те, як можна використати кореляційні ефекти в практичній астрономії, йдеться в наступних параграфах.

11.1. Зоряний інтерферометр Майкельсона

Зоряний інтерферометр Майкельсона, що схематично зображено на рис. 31, використовують для вимірювання кутової відстані між зорями. Він забезпечує високу кутову роздільну здатність під час спостереження віддалених об'єктів.

Якщо дві зорі під час спостереження звичайним телескопом виглядають як одне ціле, то дослідження інтерференції випромінювання всього об'єкту дає змогу з'ясувати, чи не складається він з двох різних просторово віддалених об'єктів.

Якщо світло випромінюють дві зорі, то воно падає на дзеркала M_1 та M_2 під майже однаковими, та все ж різними кутами, що визначаються двома хвильовими векторами $\vec{k}$ (від однієї з них) та $\vec{k}'$ (від іншої). Водночас, вважаємо, що напрямки поширення світла від однієї зорі до двох дзеркал майже однакові, оскільки відстані між зорями значно більші, ніж відстань між дзеркалами. Світло фільтрується так, що можна вважати, що на детектор попадає монохроматичне випромінювання. Переміщенням дзеркал знаходять таке їхнє розташування, щоб оптичні шляхи M_1P та M_2P були рівними. Ідея вимірювання полягає в тому, що різниця фаз електромагнітних полів, що надійшли від різних джерел (у цьому випадку від двох зір), відмінна від нуля на кожному із дзеркал і залежить від положення дзеркал $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Положення інтерференційних смуг, що утворюються під час накладання світлових полів, що надходять від двох дзеркал, залежать від напрямків на дві зорі ($\vec{k}$ та $\vec{k}'$), а також від положення дзеркал. Зв'язок між цими величинами можна встановити за допомогою таких міркувань.

Нехай електричні поля випромінювання, що надійшло з лівого та правого вхідних дзеркал на детектор P, мають вигляд:

$$E_1 = E_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}_1} + E_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\vec{r}_1},$$

$$E_2 = E_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}_2} + E_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\vec{r}_2}, \qquad (11.1)$$

де для простоти ми розглядаємо лише одну з поляризацій.

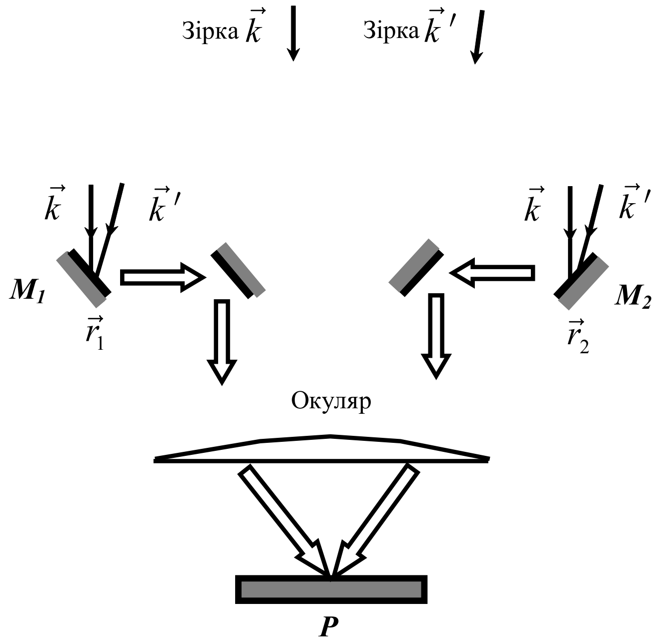

Рис. 31. Схема інтерферометра для визначення кутової відстані між зорями, що спостерігаються майже в однакому напрямку (хвильові вектори випромінювання $\vec{k}$ і $\vec{k}'$ майже однакові)

Повне поле є суперпозицією полів E_1 та E_2:

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= 2E_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{r}_1+\vec{r}_2)/2} \cos\left(\vec{k}\,\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{2}\right) +$$

$$+2E_{\vec{k}'}e^{i\vec{k}'(\vec{r}_1+\vec{r}_2)/2}\cos\left(\vec{k}'\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{2}\right). \qquad (11.2)$$

Сигнал фотодетектора пропорційний до середнього значення $\left\langle |E|^2 \right\rangle$, яке з врахуванням рівняння (11.2) дорівнює

$$\left\langle |E|^2 \right\rangle = 2\left\langle \left|E_{\vec{k}}\right|^2 \right\rangle\left(1+\cos\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)+$$
$$+2\left\langle \left|E_{\vec{k}'}\right|^2 \right\rangle\left(1+\cos\vec{k}'(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right) \quad . \qquad (11.3)$$

Під час одержання виразу (11.3) ми знехтували перехресними членами типу $\left\langle E_{\vec{k}}E^*_{\vec{k}'} \right\rangle$ оскільки випадкові електромагнітні поля, що випромінюються різними тепловими джерелами, не корелюють між собою.

Вираз (11.3) дещо спрощується, якщо $\left\langle \left|E_{\vec{k}}\right|^2 \right\rangle = \left\langle \left|E_{\vec{k}'}\right|^2 \right\rangle$. Тоді

$$\cos\left(\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)+\cos\left(\vec{k}'(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)=$$
$$=2\cos\left(\frac{\vec{k}+\vec{k}'}{2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)\cos\left(\frac{\vec{k}-\vec{k}'}{2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right) \qquad (11.4)$$

і рівняння (11.3) набуває вигляду:

$$\left\langle |E|^2 \right\rangle = 4\left\langle \left|E_{\vec{k}}\right|^2 \right\rangle\left[1+\cos\left(\frac{\vec{k}+\vec{k}'}{2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)\cos\left(\frac{\vec{k}-\vec{k}'}{2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)\right]$$

(11.5)

Множник $\cos\left(\frac{\vec{k}-\vec{k}'}{2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right)$ модулює швидку осциляційну залежність сигналу фотодетектора від відносного розташування дзеркал (тобто від $\vec{r}_1-\vec{r}_2$). Очевидно, що компоненту $\vec{k}-\vec{k}'$ паралельну до $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ можна записати у вигляді $k\varphi$, де φ – кут між хвильовими векторами.

Нульові значення модуляційного множника періодично з'являються зі зміною відстані $\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|$ на величину $a=\dfrac{2\pi}{k\varphi}=\dfrac{\lambda}{\varphi}$, де λ – довжина хвилі.

Отже, в ідеальному випадку точність вимірювання кутової відстані між зорями буде не гірше, ніж λ/a.

Якщо припустити, що $a\sim 10$ м, $\lambda\sim 4\cdot 10^{-7}$ м, то φ буде порядку $4\cdot 10^{-8}$.

На жаль, такий метод визначення кутової відстані між небесними тілами має істотний недолік. Світло, що надходить крізь атмосферу до різних дзеркал, зазнає істотно різного впливу флуктуацій показника заломлення. Тому фази полів від однієї й тієї ж зорі на різних дзеркалах залежать від конфігурації атмосферної неоднорідності, яка хаотично змінюється з часом (упродовж 10^{-3} с). Цей ефект значно погіршує точність вимірювання. Тому було запропоновано інший метод знаходження кутової відстані між зорями (або ж діаметра зорі), що ґрунтується на інтерференції інтенсивностей.

11.2. Інтерферометр Хенбері–Брауна–Твісса

Принципову схему інтерферометра зображено на рис. 32. На відміну від попереднього випадку вимірюється кореляція інтенсивностей, а не полів. Тому сигнали після підсилення попадають на перемножувальний пристрій, який і дає змогу виміряти результат інтерференції.

Теорія оптичних явищ в інтерферометрі ґрунтується на таких міркуваннях. Фотоструми детекторів залежать від сумарного електричного поля випромінювання обох джерел. Зокрема, фотострум кожного з детекторів (i) дорівнює:

$$I(\vec{r}_i) = \eta\left\{\left|E_{\vec{k}}\right|^2 + \left|E_{\vec{k}'}\right|^2 + \left[E_{\vec{k}}E^*_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}_i} + c.c.\right]\right\}, \qquad (11.6)$$

де числовий коефіцієнт η визначається ефективністю фотодетектування.

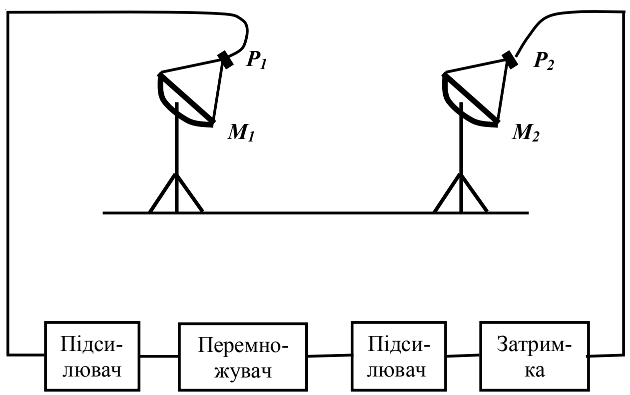

Рис. 32. Детектори P_1 та P_2 вимірюють інтенсивності світла, зібраного дзеркалами M_1 та M_2

Фотони, що надходять на i -ий детектор, мають майже однакову траєкторію в атмосфері, незалежно від того, від якої із зір вони вийшли. Тому зміни їхніх імпульсів, зумовлені атмосферними неоднорідностями, однакові. Це означає, що інтерференційні члени (пропорційні $e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}_i}$) майже не залежать від атмосферного впливу. Середнє значення сигналу після перемножувального пристрою дорівнює

$$\left\langle I(\vec{r}_1)I(\vec{r}_2)\right\rangle = \eta^2\left\langle\left\{\left|E_{\vec{k}}\right|^2 + \left|E_{\vec{k}'}\right|^2 + \left[E_{\vec{k}}E^*_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}_1} + c.c.\right]\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\left|E_{\vec{k}}\right|^2 + \left|E_{\vec{k}'}\right|^2 + \left[E_{\vec{k}}E^*_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}_2} + c.c.\right]\right\}\right\rangle = \qquad (11.7)$$

$$= \eta^2\left\{\left(\left\langle\left|E_{\vec{k}}\right|^2\right\rangle + \left\langle\left|E_{\vec{k}'}\right|^2\right\rangle\right)^2 + 2\left\langle\left|E_{\vec{k}}\right|^2\right\rangle\left\langle\left|E_{\vec{k}'}\right|^2\right\rangle\cos(\vec{k}-\vec{k}')(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\right\}$$

Так само, як і у випадку інтерферометра Майкельсона, в кореляційну функцію (11.7) входить осцилюючий множник, залежний від кутової відстані між зорями. За зміною цього множника під час переміщення дзеркал можна знайти кутову відстань. Крім очевидної переваги інтерферометра Хенбері-Брауна–Твісса, пов’язаної з мінімізацією атмосферного впливу, у нього є й істотний недолік. На відміну від інтерферометра Майкельсона, сигнал, що вимірюється, пропорційний квадрату інтенсивності вхідного поля. Тому метод може стати неефективним для досліджень дуже віддалених об’єктів.

Н А У К О В Е   В И Д А Н Н Я

Чумак Олександр Олександрович

КВАНТОВА ОПТИКА

Головний редактор *Галина Шопа*
Літературний редактор *Михайлина Маїк*
Художній редактор *Володимир Гавло*

Чумак О. О. Квантова оптика. – Львів: Євросвіт, 2012. – 272 с.
ISBN 978-966-8364-80-8

Здано в набір 25.05.2012. Підписано до друку 25.09.2012. Формат 60х90/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 16,32 Умовн. фарбовідб. 16,56. Наклад 300 примірників.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. серія ДК № 1185 від 29.12.2002 р.

СП „Євросвіт”
79005 м. Львів, а/с 6700
phworld@franko.lviv.ua