РОЗДІЛ 2
ГРАВІТАЦІЙНІ ХВИЛІ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ

І. С. Ганджа

Вступ

Хвильовий рух морської поверхні завжди зачаровував та надзвичайно привертав увагу людства. Чарівні, але одночасно й небезпечні океанські та морські хвилі викликали інтерес весь час, коли людина займалася рибальством, морською торгівлею та мореплавством, задовго до того, як розпочалося формальне наукове вивчення океану. Динаміка поверхні моря настільки складна, що і сьогодні розуміння певних властивостей хвиль на воді та їх моделювання представляють справжній виклик як з наукової, так і прикладної точок зору.

Поверхневі хвилі відіграють ключову роль у різноманітних морських процесах та численних аспектах взаємодії гідросфери і атмосфери. Так, захоплення бульбашок повітря, що відбувається при перекиді й руйнуванні хвиль, та турбулентність морської поверхні підсилюють процес переносу кисню в океан, що є визначальним для морських організмів. З іншого боку, подібні механізми сприяють проникненню в гідросферу відповідальних за парниковий ефект газів (таких як вуглекислий), що моделює річні зміни клімату і є важливим фактором у глобальному потеплінні. На мілкій воді хвилі взаємодіють з підводними рослинами та осадовими породами, часто викликаючи інтенсивну ерозію узбережжя. Масоперенос, що створюють поверхневі хвилі, є важливим фактором у великомасштабному розповсюдженні забруднень.

Раптове виникнення надзвичайно високих і крутих хвиль у відкритому морі складає серйозну небезпеку кораблям та морським спорудам (платформи, нафтові свердловини тощо). Маленькі судна, такі як рибальські шхуни і траулери, перекидаються та інколи навіть губляться в штормових морях. Більші кораблі та морські конструкції зазнають серйозних ушкоджень, що можуть складати загрозу для життя. Тому знання навантажень на морські споруди та суда, що викликаються хвильовим рухом води в несприятливих морських умовах, є визначальним для того, щоб забезпечити їх безпеку та мінімізувати ризик аварії. Супутникове сканування поверхні океану надає цінну інформацію для передбачення штормів та спрямування судів в обхід складних морських умов. Для того, щоб розкодувати мікрохвильовий сигнал радару, відбитий морською поверхнею, необхідне детальне знання форми та динаміки великоамплітудних (крутих) хвиль та механізмів їх руйнування.

В багатьох областях фізики вивчення будь-якого явища починається з дослідження модельних систем, де не враховується переважна частина складності реального світу. Якщо, незважаючи на всі спрощення, модель описує реальні властивості досліджуваної системи з певною мірою достовірності, то користь такої моделі вважається безсумнівною. Гідродинаміка не є виключенням з цих правил. Реальні фізичні процеси, що відбуваються в земній гідросфері, настільки різноманітні, що жодна математична модель не може врахувати всі фактори, які обумовлюють хвильовий рух морської поверхні. Тому спочатку завжди досліджуються спрощені моделі, а потім узагальнюються для врахування більш специфічних властивостей оточуючого середовища. Подібні моделі, хоча часто й тільки якісно, описують більшість з численних хвильових явищ.

В даній роботі вивчається хвильовий рух поверхні рідини, обумовлений лише одним фактором — *силою тяжіння*. Тому хвилі, що розглядаються, носять назву *гравітаційних*. Для рідини з малою в'язкістю, якою є вода, найбільш адекватною моделлю (такою, що при мінімумі врахованих умов відображає реальні властивості фізичної системи) в цьому випадку є модель *ідеальної рідини*, де нехтуються ефекти в'язкості й теплопровідності. Хоча вивчення руху гравітаційних хвиль на поверхні ідеальної рідини розпочалося ще в 19 сторіччі з класичних праць Стокса, Релея, Герстнера, Кортевега і де Вріза та інших, дослідження властивостей хвиль великої амплітуди, коли амплітуду хвилі не можна вважати малою порівняно з довжиною хвилі, стало можливим лише в останні десятиріччя 20 сторіччя завдяки революційному розвитку комп'ютерної техніки. Незважаючи на значний прогрес у вивченні динаміки таких суттєво нелінійних хвиль, які носять назву *крутих* хвиль, деякі особливості їх розповсюдження досі вимагають детального теоретичного вивчення та пояснення. Зокрема, не до кінця з'ясованими залишаються механізми перекиду та руйнування хвиль на глибокій воді, утворення штормових хвиль (явище дев'ятого валу), процес загострення гребенів гравітаційних хвиль з ростом їх амплітуди, виникнення поодиноких хвиль величезної амплітуди[1] на поверхні океану.

В даному огляді розглядаються рівняння руху ідеальної рідини та канонічна модель розповсюдження гравітаційних хвиль на її поверхні, аналізуються наближення цієї моделі, в її межах окреслюються основні відомі властивості гравітаційних хвиль, та подаються нові ідеї щодо пояснення хвильових явищ, які залишаються ще не до кінця вивченими.

[1] freak (rogue) waves (англ.)

Перелік умовних позначень

Δ	—	оператор Лапласа
Re	—	дійсна частина
Im	—	уявна частина
$*$	—	комплексне спряження
δ	—	зміна величини / варіація
$\simeq$	—	оцінка порядку величини
$\overline{\star}$	—	усереднення за просторовим періодом
$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$	—	елемент кривої
$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$	—	елемент поверхні
h	—	глибина рідини
c	—	фазова швидкість хвилі
λ	—	довжина хвилі
k	—	хвильовий вектор
θ	—	фаза хвилі
$\boldsymbol{v}$	—	вектор швидкості (вектори виділяються напівжирним шрифтом)
v_x, v_y, v_z	—	компоненти вектора швидкості (проекції на декартові вісі)
Φ	—	потенціал швидкості в лабораторній системі
ϕ	—	потенціал швидкості у власній системі відліку хвилі
Φ_x, Φ_y, Φ_z	—	частинні похідні (для скалярів)
Ψ	—	функція струму в лабораторній системі
ψ	—	функція струму у власній системі відліку хвилі
H	—	висота хвилі (відстань від впадини до гребеня)
$A = H/\lambda$	—	амплітуда (крутизна) хвилі (безрозмірна висота)
η	—	профіль (підняття) вільної поверхні
q	—	модуль швидкості у власній системі відліку хвилі
$q(0)$	—	швидкість на гребені у власній системі відліку хвилі
$q(\pi)$	—	швидкість на впадині у власній системі відліку хвилі
E	—	густина повної енергії хвилі
K	—	густина кінетичної енергії хвилі
U	—	густина потенціальної енергії хвилі
I	—	густина імпульсу хвилі (стоксовий потік)
ϑ	—	кут нахилу вільної поверхні до горизонтальної вісі

2.1. Канонічна модель гідродинаміки

2.1.1. Опис руху суцільного середовища. Підходи Ейлера і Лагранжа. Розглядатимемо рідину як однорідне ізотропне суцільне середовище. В феноменологічній моделі суцільного середовища вважається, що рідина складається з фізично нескінченно малих частинок, об'єм яких знехтовний порівняно з характерним об'ємом самої рідини, але значно більший за розміри молекул та міжмолекулярні відстані. При цьому вважається, що кожна така частинка складається з одних і тих же атомів (відсутні хімічні та ядерні реакції), є рівноважною термодинамічною системою, а між різними частинками немає дифузії. Такі фізично нескінченно малі частинки надалі називатимемо частинками рідини (або рідкими частинками).

Дослідження руху рідини може бути проведене двома шляхами [13, с. 16–19]. Перший підхід (що носить ім'я Лагранжа) полягає в описі руху самих частинок рідини. В цьому випадку механічний стан частинок в кожний момент часу t описується їх радіус-вектором $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r_0};\ t)$ і швидкістю $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r_0};\ t)$, де радіус-вектор $\boldsymbol{r_0}$ частинки в початковий момент часу характеризує її порядковий номер. В другому підході (що носить ім'я Ейлера) описується не рух самих частинок рідини, а зміна властивостей рідини з часом у фіксованій точці простору $\boldsymbol{r}$, через яку проходять різні частинки. Тоді механічний стан рідини в кожній точці простору задається розподілом швидкості рідини $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t)$. Зв'язок між швидкістю окремої частинки (змінні Лагранжа) і розподілом швидкості (змінні Ейлера) визначається таким чином:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r_0};\ t) = \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(t),\ t\big),\ \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r_0}, \tag{1}$$

де $\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r_0};\ t)$. Тоді зв'язок між зміною швидкості частинки рідини та зміною швидкості в даній точці простору в даний момент часу виражається таким співвідношенням:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}. \tag{2}$$

Похідна $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)$ носить назву субстанціональної, оскільки пов'язана безпосередньо з частинками рідини [17, с. 16]. Таким чином, обидва згадані підходи рівноправні, вибір якогось з них обумовлюється характером конкретної задачі.

Крива, яку описує в просторі окрема частинка рідини називатимемо її *траєкторією* руху. Рівняння траєкторії частинки зручно записувати в змінних Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(t),\ t\big), \quad \boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r_0}. \tag{3}$$

У декартових координатах x, y, z рівняння траєкторій можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x(t)}{v_x\big(x(t), y(t), z(t),\ t\big)} = \frac{\mathrm{d}y(t)}{v_y\big(x(t), y(t), z(t),\ t\big)} &= \\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{v_z\big(x(t), y(t), z(t),\ t\big)} &= \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4}$$

де v_x, v_y, v_z — проекції вектора швидкості.

Для опису руху рідини в цілому часто зручніше використовувати підхід Ейлера, об'єктом вивчення якого є скалярні й векторні поля. Для впорядкування опису векторних полів вводять поняття векторних ліній, в кожній точці яких вектор поля спрямований по дотичній. Для поля швидкостей це є *лінії струму*, що в кожній точці простору в будь-який момент часу мають за дотичний вектор швидкості [18, с. 41–42]. При цьому час грає роль фіксованого параметра. Рівняння для ліній струму знаходимо з умови паралельності векторів $\boldsymbol{v}$ і $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{v} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0, \tag{5}$$

що в декартових координатах має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y,z;\ t)} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y,z;\ t)} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z(x,y,z;\ t)}. \tag{6}$$

Лінії струму слід відрізняти від траєкторій частинок — це в загальному випадку різні криві. Лінії струму задають напрям швидкості різних частинок рідини в послідовних точках простору в *фіксований момент часу*, тоді як траєкторії задають напрям швидкості фіксованих частинок у *послідовні моменти часу* [17, с. 24]. Рівняння для траєкторій (4) і ліній струму (6) співпадають лише за умови, що поле швидкості явно не залежить від часу, тобто $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0$. Такі поля називаються *стаціонарними* [18, с. 43]. Отже, лінії струму співпадають з траєкторіями частинок лише в стаціонарному полі швидкості.

Для опису руху рідини окрім механічного стану необхідно ще визначити її термодинамічний стан [17, с. 13]. Термодинамічний стан однокомпонентної рідини визначається її будь-якими двома термодинамічними величинами, наприклад, тиском $p(\boldsymbol{r},\ t)$ і густиною $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$, а інші термодинамічні величини, наприклад, температура $T(\boldsymbol{r},\ t)$, визначаються з рівняння стану. Таким чином, розподіли швидкості, тиску і густини повністю визначають стан рідини, що рухається.

2.1.2. Рівняння руху ідеальної рідини. Рівняння руху суцільного середовища, які записуватимемо в змінних Ейлера, породжуються законами збереження. З закону збереження кількості речовини випливає *рівняння неперервності* [17, с. 14–15]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0. \tag{7}$$

Вектор $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ називається вектором *густини потоку рідини* (маси). Його напрям збігається з напрямом руху рідини, а абсолютне значення визначається масою рідини, що протікає в одиницю часу через одиницю площі, розташованій перпендикулярно швидкості.

Усі інші закони збереження в загальному випадку мають досить складний і громіздкий вигляд (див., наприклад, підручник Седова [30]). Рівняння значно спрощуються, якщо не враховуються ефекти *в'язкості* (втрати енергії внаслідок внутрішнього тертя). В цьому випадку закон збереження імпульсу частинки рідини виражається *рівнянням Ейлера*

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g} \tag{8}$$

або

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g},$$

яке можна безпосередньо одержати з другого закону Ньютона [17, с. 15–16]. Тут $\boldsymbol{g}$ — прискорення в зовнішньому полі тяжіння. Вектор

$$\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \tag{9}$$

називається вектором *завихреності* [17, с. 31].

З рівнянь неперервності та Ейлера визначаються розподіли швидкості $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t)$ й тиску $p(\boldsymbol{r},\ t)$. Невизначеним залишається розподіл густини $\rho(\boldsymbol{r},\ t)$. Для його встановлення в загальному випадку необхідно використати ще один закон збереження — енергії, — що породжує рівняння теплопереносу і визначає розподіл температури [17, с. 270–277], а також рівняння стану, що задає зв'язок між густиною, тиском і температурою [20, с. 8–11]. Для того, щоб явища теплопереносу не впливали на динаміку суцільного середовища (яке вважаємо нев'язким), необхідно знехтувати залежністю густини від температури. Тоді густина залежатиме лише від тиску (таке середовище називають *баротропним*) і визначатиметься рівнянням стану.

Рідина, в якій несуттєві (*i*) ефекти *в'язкості* та (*ii*) ефекти *теплопереносу* (теплообмін між окремими ділянками рідини) називається *ідеальною* [17, с. 17]. Таким чином, рух ідеальної рідини відбувається без дисипації енергії і є *адіабатичним* в кожній точці. Якщо при цьому в початковий момент часу ентропія стала в усіх точках рідини, то вона залишається сталою в усіх точках рідини й у всі наступні моменти часу, тобто рух є *ізентропічним*. У розділі 2.2.4 показано, що за умови ізентропічності густину рідини можна вважати незалежною від температури.

Для ідеальної рідини справедливий закон збереження *циркуляції швидкості* $\mathit{\Gamma}$ вздовж довільного однозв'язного замкненого контура L [17, с. 29–31]:

$$\mathit{\Gamma} = \oint\limits_L \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int\limits_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{const}, \tag{10}$$

де S — поверхня, що спирається на контур L. Цей закон також часто називається теоремою Томсона (Кельвіна) [13, с. 151] або законом збереження потоку вектора завихреності.

2.1.3. Потенціальний рух у нестисливій рідині. Рівняння Лапласа і Бернуллі. Граничні умови. Побудова найпростішої (канонічної) моделі гідродинаміки не обмежується лише наближенням ідеальної рідини. Надалі будемо розглядати тільки *потенціальну* (безвихрову) течію рідини, коли можна ввести потенціал швидкості Φ:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \nabla\Phi. \tag{11}$$

З закону збереження потоку вектора завихреності (10) внаслідок довільності поверхні S і нормалі до неї випливає *теорема Лагранжа* [18, с. 159]: якщо в ідеальній рідині, що займає однозв'язну область, рух потенціальний ($\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$) в певний момент часу, то він залишається потенціальним і в будь-який наступний момент часу. При цьому не можуть існувати замкнені лінії струму. Дійсно, оскільки вектор швидкості спрямований вздовж дотичної до лінії струму ($\boldsymbol{v}$ співнапрямлений з елементом кривої $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$), то вздовж лінії струму циркуляція швидкості $\Gamma > 0 \neq 0$ [17, с. 35].

Якщо разом з потенціальністю руху вважати прискорення $\boldsymbol{g}$ у зовнішньому полі тяжіння сталим у всій рідині, то рівняння Ейлера інтегрується й набуває вигляду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} = C(t),$$

де w — ентальпія одиниці маси ідеальної рідини: $\mathrm{d}w = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$ (ентропія стала), а константа інтегрування $C(t)$ є довільною функцією часу. Функцію $C(t)$ часто вносять у потенціал [35, с. 416]: $\Phi'(\boldsymbol{r},\ t) = \Phi(\boldsymbol{r},\ t) - \int C(t)\,\mathrm{d}t$, оскільки потенціал $\Phi(\boldsymbol{r},\ t)$ у загальному випадку визначений з точністю до довільної функції часу $f(t)$. При безпосередніх же розрахунках зручно мати справу з однозначно визначеним потенціалом. Для цього будемо навпаки включати довільну функцію $f(t)$ в сталу інтегрування $C(t)$, що в конкретних задачах визначається з граничних або початкових умов.

Наступне наближення, що спрощує рівняння руху, є наближення *нестисливості* рідини, тобто $\rho(\boldsymbol{r},\ t) = \mathrm{const}$. У цьому випадку рівняння неперервності набуває вигляду

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{12}$$

що в разі потенціальної течії перетворюється в *рівняння Лапласа*

$$\Delta \Phi = 0 \tag{13}$$

і визначає розподіл швидкостей. Рівняння Ейлера ж перетворюється в *рівняння Бернуллі*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} = C(t), \tag{14}$$

що визначає розподіл тиску за відомим розподілом швидкостей.

Для рівняння Лапласа необхідно задати *граничні умови* — як мінімум по одній на кожній границі. В багатьох задачах для ідеальної рідини це є умови того, що частинки рідини не перетинають границі [13, с. 64–65]. При цьому нехтується той факт, що в реальних рідинах (де в'язкість завжди ненульова) при обтіканні твердих тіл частинки рідини, що знаходяться на границі розділу, "прилипають" до твердої границі (див. розділ 2.2.2).

Якщо *границя нерухома*, то швидкість частинок рідини має бути перпендикулярна нормалі до границі. Тоді

$$\nabla F \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{15}$$

де $F(\boldsymbol{r}) = 0$ — рівняння границі.

Якщо границя є *рухомою поверхнею*, то швидкість руху частинок рідини на цій поверхні й швидкість руху самої поверхні мають мати однакові проекції на нормаль до поверхні (частинки рухаються по дотичній до поверхні) — *кінематична гранична умова*. Нехай $F(\boldsymbol{r},\ t) = 0$ — рівняння поверхні. Тоді умова того, що частинка рідини, котра була на поверхні в момент t, залишиться на ній в момент $t + \mathrm{d}t$, є такою: $F(\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r},\ t + \mathrm{d}t) = 0$. Розклавши це рівняння в ряд Тейлора і розділивши на $\mathrm{d}t$, остаточно одержимо:

$$\nabla F \cdot \boldsymbol{v} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{16}$$

2.1.4. Плоский рух рідини. Якщо поле швидкості залежить лише від двох координат, скажімо, x і y, причому швидкість скрізь паралельна площині xy, то рух рідини називається *двовимірним* або *плоским* [17, с. 39]. Граничні умови (15) і (16) означають, що швидкість частинок рідини на кожній границі напрямлена по дотичній до поверхні, тобто у випадку двовимірного руху *границі є лініями струму*. Поняття функції струму, що можна ввести у випадку плоского руху нестисливої рідини, дозволяє надати цьому факту математичній зміст.

Рівняння ліній струму (6) у випадку плоского руху має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} \quad \Leftrightarrow \quad -v_y\,\mathrm{d}x + v_x\,\mathrm{d}y = 0. \tag{17}$$

При цьому з рівняння неперервності для нестисливої рідини (12) маємо

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial\,(-v_y)}{\partial y}.$$

Дане співвідношення означає, що існує функція $\psi(x,\,y)$ така, що

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y},\;\; v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{18}$$

Величина $\psi(x,\,y)$ називається *функцією струму* [13, с. 130]. Враховуючи співвідношення (17) і (18), вираз $-v_y\,\mathrm{d}x + v_x\,\mathrm{d}y$ за умови *стаціонарності поля швидкості* є повним диференціалом функції ψ так, що на лінії струму

$$\mathrm{d}\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x,\,y) = \mathrm{const}, \tag{19}$$

причому стала const різна для різних ліній струму. Функція струму $\psi(x,\,y)$ зберігає стале значення вздовж кожної лінії струму. Таким чином, при стаціонарному плоскому русі нестисливої рідини кожна лінія струму визначається значенням функції струму на ній. При цьому умова сталості функції струму на кожній з границь, еквівалентна граничним умовам (15) і (16).

Знайдемо *потік рідини* Q через криву, проведену між двома точками 1 і 2 площини xy. При цьому орієнтацію вектора нормалі $\boldsymbol{n}$ до кривої в кожній точці обиратимемо так, щоб кут між вектором $\boldsymbol{n}$ і напрямом $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ обходу кривої (за абсолютною величиною $\mathrm{d}l$ — елемент довжини кривої) складав $+\frac{\pi}{2}$, тобто найкоротший поворот від вектора $\boldsymbol{n}$ до вектора $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ здійснювався проти годинникової стрілки. Тоді

$$\begin{aligned} Q = \int\limits_1^2 \rho\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}l = \rho\int\limits_1^2 \big(-v_y\,\mathrm{d}x + v_x\,\mathrm{d}y\big) = \rho\int\limits_1^2 \mathrm{d}\psi = \\ = \rho\,\big(\psi_2 - \psi_1\big). \end{aligned} \tag{20}$$

Отже, при плоскому плині рідини за умови стаціонарності поля швидкості потік рідини через будь-яку криву не залежить від її форми і визначається різницею значень функції струму на кінці й початку кривої (більш детальний вивід формули (20) див. [13, с. 130]).

У випадку безвихрового руху поле швидкостей визначається потенціалом швидкості. Нехай $\phi(x, y)$ — потенціал швидкості в системі, де задано функцію струму $\psi(x, y)$. Враховуючи, що $v_x = \phi_x$, $v_y = \phi_y$, і зважаючи на співвідношення (18), одержуємо

$$\phi_x = \psi_y, \quad \phi_y = -\psi_x. \tag{21}$$

Це є відомі умови Коші-Рімана того, що комплексна величина $w = \phi + \mathrm{i}\psi$ є аналітичною функцією комплексного аргументу $\zeta = x + \mathrm{i}y$ [41, с. 373]. Функція $w(\zeta)$ називається *комплексним потенціалом* [17, с. 40].

Аналітична функція $w(\zeta)$ однозначно відображає точки площини комплексної змінної $\zeta = x + \mathrm{i}y$, яку називатимемо *фізичною площиною*, на площину комплексної змінної $w = \phi + \mathrm{i}\psi$, яку називатимемо *оберненою площиною*. Таке відображення називають *конформним* [18, с. 169]. Геометрія границь, що обмежують область, зайняту рідиною, часто значно простіша в оберненій площині, оскільки функція струму ψ стала на кожній з границь за умови стаціонарності поля швидкості, тоді як у фізичній площині ці границі можуть мати складну геометричну форму. Виходячи з цих міркувань, плоскі задачі часто зручніше розв'язувати в оберненій площині, вважаючи потенціал швидкості ϕ й функцію струму ψ незалежними змінними, а просторові координати x і y — функціями від ϕ і ψ. У цьому полягає суть так званого *методу оберненої площини* (див., наприклад, Шварц і Фентон [153]). З іншого боку, використання методу оберненої площини (*i*) обмежене двовимірним випадком; (*ii*) ускладнює розрахунок просторових величин, що визначені в фізичній площині; (*iii*) більш чутливе до сингулярностей (особливих точок), де $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} = 0$, що ускладнює безпосередні розрахунки. Внаслідок цього методи фізичної площини є більш універсальними.

2.1.5. Гравітаційні хвилі на поверхні рідини. Рівняння руху. Вільна поверхня рідини, що знаходиться в рівновазі в полі тяжіння, — плоска. Якщо під дією якогось зовнішнього збурення поверхня рідини виводиться з цього рівноважного стану, то в рідині виникає коливальний рух, що розповсюджується вздовж поверхні у вигляді хвиль. Цей хвильовий рух захоплює й внутрішні шари рідини, викликаючи потоки частинок рідини, тим інтенсивніші, чим більша енергія хвиль, але тим меншої величини, чим глибше ці шари розташовані.

Нехай y — спрямована вгору вертикальна вісь, а x і z — дві взаємно перпендикулярні горизонтальні вісі. Потенціальні хвилі на поверхні нестисливої ідеальної рідини і пов'язані з ними потоки всередині рідини описуються рівнянням Лапласа (13) в усій області, що зайнята рідиною: $-h(x,\ z) < y < \eta(x,\ z,\ t)$ (поверхню рідини вважаємо необмеженою), де $y = -h(x,\ z)$ — рівняння нерухомого дна, а $y = \eta(x,\ z,\ t)$ — рівняння вільної поверхні. Функцію $y = \eta(x,\ z,\ t)$ називатимемо *профілем* поверхні (хвилі). На нерухомому дні й рухомій поверхні справедливі відповідно граничні умови (15) і (16), що набувають такого вигляду:

$$\Phi_x h_x + \Phi_z h_z + \Phi_y = 0, \quad y = -h(x,\ z); \tag{22}$$

$$\eta_t + \Phi_x \eta_x + \Phi_z \eta_z - \Phi_y = 0, \quad y = \eta(x,\ z,\ t). \tag{23}$$

Оскільки профіль поверхні невідомий, то для його визначення необхідна ще одна гранична умова на вільній поверхні. Вона задається рівнянням Бернуллі (14) і називається *динамічною гра-*

Рис. 1. Приклад майже двовимірних хвиль.

ничною умовою [35, с. 417–418]:

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\left(\Phi_x^2 + \Phi_z^2 + \Phi_y^2\right) + \frac{p}{\rho} + gy = C(t), \quad y = \eta(x,\ z,\ t). \qquad (24)$$

При цьому вважаємо, що хвильовий рух поверхні визначається лише одним фактором — *силою тяжіння*, а поверхневим натягом й іншими чинниками можна знехтувати. Такі хвилі називаються *гравітаційними* [17, с. 55].

Дані граничні умови необхідно також доповнити початковими умовами, які б однозначно задавали вплив початкового збурення на рідину.

2.1.6. Стаціонарні прогресивні періодичні двовимірні хвилі. Канонічна задача. В консервативній системі (якою є ідеальна рідина) після завершення перехідних процесів може встановитись *стаціонарний* рух рідини, такий, що властивості поверхневих хвиль та їх форма не змінюються з часом. З усіх можливих стаціонарних хвиль будемо вивчати лише хвилі (*i*) *прогресивні* (такі, що розповсюджуються у виділеному напрямі), (*ii*) *періодичні* і (*iii*) *двовимірні* (однорідні вздовж вісі, що перпендикулярна до напряму їх розповсюдження, див. рис. 1). В цьому випадку зовнішнє початкове збурення визначає лише довжину хвилі λ та її енергію,

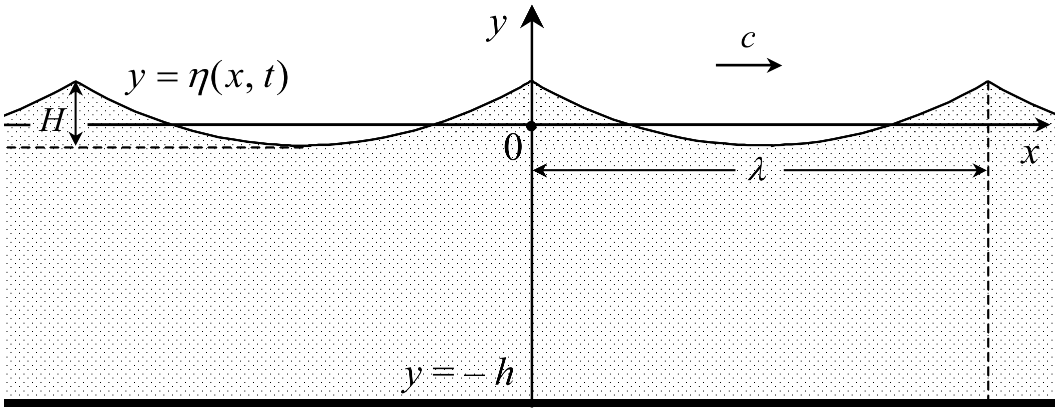


Рис. 2. Лабораторна система координат.

що грають роль початкових умов і є параметрами задачі. Часто замість енергії хвилі обирають більш зручний параметр — висоту хвилі H (висота хвилі від впадини до гребеня). Вивчення властивостей стаціонарних прогресивних періодичних двовимірних гравітаційних поверхневих хвиль і викликаних ними потоків всередині рідини залежно від цих двох параметрів (насправді це один безрозмірний параметр — *амплітуда* або *крутизна* хвилі $A = H/\lambda$) і складає задачу даного огляду. Хвилі з $A \ll 1$ називатимемо хвилями *малої амплітуди*, а хвилі з $A \sim O(1)$ називатимемо *крутими* хвилями.

Оберемо нерухому лабораторну систему координат[2] так, що хвилі розповсюджуються зліва направо вздовж горизонтальної осі x зі сталою швидкістю c відносно нерухомого плоского дна, що знаходиться на відстані (глибині) h від середнього рівня хвилі (який розділяє її на рівновеликі області). Цей середній рівень оберемо за нульовий рівень $y = 0$ спрямованої вгору вертикальної осі y (див. рис. 2). Умова стаціонарності для прогресивної хвилі встановлює однозначний зв'язок між координатою x і часом t через фазу хвилі $\theta = kx - \omega t$ ($k = 2\pi/\lambda$ — хвильовий вектор, $\omega = ck$ — частота хвилі) так, що

[2]Під лабораторною розуміємо систему координат, в якій проводяться спостереження.

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c\,\frac{\partial}{\partial x}\,. \tag{25}$$

Умова періодичності означає, що для будь-якої функції f, котра описує просторові й часові характеристики рідини, викликані хвильовим рухом, справедливе співвідношення

$$f(x,\ y,\ t) = f(x+\lambda,\ y,\ t) = f(x,\ y,\ t+T), \tag{26}$$

де λ — довжина хвилі (її просторовий період), T — часовий період, причому за умови (25) $\lambda = cT$ (c — фазова швидкість хвилі) і $f(x,\ y,\ t) = f(\theta,\ y)$.

Задача про розповсюдження двовимірних хвиль сталої форми має два граничні випадки [153, с. 13]: (*i*) $h/\lambda \to \infty$ — *хвилі на глибокій воді* (*нескінченна глибина*); (*ii*) $h/\lambda \to 0$ — *поодинокі хвилі*[3] — такі, що складаються з поодинокого гребеня. Поодинокі хвилі не є періодичними (їх довжина нескінченна), вивчення таких хвиль виходить за межі даного огляду.

Граничні умови (22) і (23) на нерухомому дні й рухомій поверхні з врахуванням умови (25) і двовимірності руху набувають такого вигляду:

$$\Phi_y = 0, \quad y = -h; \tag{27}$$

$$(c-\Phi_x)\,\eta_x + \Phi_y = 0, \quad y = \eta(x,\ t); \tag{28}$$

а рівняння Бернуллі (14), що задає динамічну граничну умову, стає таким:

$$\frac{1}{2}\left((c-\Phi_x)^2 + \Phi_y^2\right) + \frac{p}{\rho} + gy = \frac{c^2}{2} + C, \tag{29}$$

де внаслідок стаціонарності руху стала інтегрування C не залежить від часу. Визначимо цю сталу.

Знайдемо масу стовпчика рідини між вільною поверхнею і дном з розміром основи, рівним довжині хвилі λ, вздовж вісі x і розмі-

[3] solitary waves (англ.)

ром L вздовж вісі z, перпендикулярній площині xy:

$$M = L\int_0^{\lambda}\int_{-h}^{\eta(\theta)} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = L\int_0^{\lambda} \rho\big(h+\eta(\theta)\big)\,\mathrm{d}x = \rho S h + \rho S\overline{\eta}, \qquad (30)$$

де $S = L\lambda$ — площа основи стовпчика,

$$\overline{\star} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} \star\,\mathrm{d}x \qquad (31)$$

означає усереднення за просторовим періодом. Зауважимо, що $\overline{\eta} = 0$, якщо $y = 0$ — середній рівень хвилі. Якщо вважати, що збудження хвиль відбувалося без притоку маси, то маса M має бути сталою під час всієї еволюції хвилі. Таким чином, $h+\overline{\eta}$ є глибиною *спокійної води*, коли немає хвиль і потоків. Оскільки відносно середнього рівня хвилі $\overline{\eta} = 0$, то *за умови збереження повної маси рідини середній рівень стаціонарної хвилі збігається з рівнем спокійної води*.

Визначимо тиск на дні. У випадку нескінченної глибини (*глибока вода*) $h = \infty$ рух хвиль на поверхні не викликає потоків на дні. Тоді $\Phi_x|_{y=-\infty} = 0$, а $\Phi_y|_{y=-\infty} = 0$ з граничної умови (27), отже, з рівняння Бернуллі (29) випливає, що на нескінченній глибині тиск сталий. Для скінченної глибини рух хвиль на поверхні в тій чи іншій мірі викликає рух всієї рідини, хоча він і затухає з глибиною. Швидкість рідини на дні (як і на будь-якому іншому горизонтальному рівні, що повністю належить області, зайнятій рідиною) є періодичною функцією з просторовим періодом λ, тому

$$\overline{\Phi_x}|_{y=\mathrm{const}} = 0, \qquad (32)$$

але неусереднена швидкість $\Phi_x|_{y=-h} \neq \mathrm{const}$. Тому тиск на дні також не є сталим, проте його усереднене значення за просторовим періодом є сталим на всьому дні і має визначатись масою рідини над дном і середнім атмосферним тиском p_0 на поверхні, а саме, враховуючи (30):

$$\overline{p}\,|_{y=-h} = p_0 + \frac{Mg}{S} = p_0 + \rho\, g(h+\overline{\eta}). \tag{33}$$

Тоді, усереднивши на дні рівняння Бернуллі (29) за просторовим періодом з врахуванням умов (27), (32) і (33), одержимо значення сталої C:

$$C = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\,\overline{\Phi_x^2}\,|_{y=-h} + g\overline{\eta}. \tag{34}$$

Для того, щоб на поверхні в рівняння Бернуллі не входив тиск, необхідно зробити ще два наближення: (i) *знехтувати рухом повітря* над поверхнею рідини (густина повітря значно менша за густину води) і (ii) вважати *атмосферний тиск сталим* на всій поверхні й рівним середньому значенню p_0 (див. розділ 2.2.5). Тоді з врахуванням (34) *динамічна гранична умова* (29) набуває остаточного вигляду:

$$\frac{1}{2}\Big((c-\Phi_x)^2 + \Phi_y^2\Big) + gy = \frac{c^2}{2} + \frac{\overline{\Phi_x^2}\,|_{y=-h}}{2} + g\overline{\eta} = B,\ \ y = \eta(x,\,t). \tag{35}$$

Стала B носить назву *константи Бернуллі* (див., наприклад, Коуклет [62, с. 205]). Якщо $y=0$ — середній рівень хвилі, то $\overline{\eta}=0$. Тоді у випадку глибокої води $B = c^2/2$. Часто це ж саме значення $B = c^2/2$ константи Бернуллі залишають і у випадку скінченної глибини. Для цього необхідно покласти $\overline{\eta} = -\frac{1}{2g}\,\overline{\Phi_x^2}\,|_{y=-h}$, що означає *підняття* початку відліку $y=0$ на відстань $\frac{1}{2g}\,\overline{\Phi_x^2}\,|_{y=-h}$ відносно середнього рівня хвилі.

Усереднивши рівняння Бернуллі (35) на вільній поверхні за просторовим періодом, одержимо відомі *співвідношення Леві-Чивіта* (див. [16, с. 525]):

$$\begin{gathered}\Big(\overline{(\Phi_x - c)^2} + \overline{\Phi_y^2}\Big)\Big|_{y=\eta(x,\,t)} = \overline{(\Phi_x - c)^2}\,\Big|_{y=-h} \quad \Leftrightarrow \\ \overline{q^2}\,|_{y=\eta(x,\,t)} = \overline{q^2}\,|_{y=-h},\end{gathered} \tag{36}$$

де q^2 — квадрат швидкості частинок рідини в системі відліку, де хвиля нерухома. Таку систему відліку називатимемо *власною системою відліку хвилі*. Таким чином, *у власній системі відліку хвилі середнє значення квадрата швидкості на поверхні дорівнює середньому значенню квадрата швидкості на дні.*

Рівняння Лапласа (13) з кінематичною і динамічною граничними умовами (28) і (35) на вільній поверхні та граничною умовою (27) на дні й складають *канонічну модель* гідродинаміки. Незважаючи на всі зроблені наближення, канонічна модель залишається складною математичною задачею, оскільки (*i*) вона суттєво нелінійна (для хвиль з $A \sim O(1)$ відсутній малий параметр) і (*ii*) граничні умови задані на невідомій поверхні.

2.1.7. Густина енергії і густина імпульсу хвилі. Енергія одиниці об'єму рідини складається з суми об'ємних густин кінетичної і потенціальної енергій

$$\mathscr{E} = \frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon,$$

де ε — внутрішня енергія одиниці маси рідини [17, с. 25]. У зовнішньому полі тяжіння $\varepsilon = gy$. Знайдемо повну енергію стовпчика рідини між вільною поверхнею хвилі й дном з розміром основи, рівним довжині хвилі λ, вздовж вісі x і розміром L вздовж вісі z, перпендикулярній площині xy:

$$\mathscr{H}_{\text{повна}} = L\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)} \mathscr{E}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = L\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho g y\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

За відсутності хвильового руху енергія цього ж стовпчика рідини дорівнює

$$\mathscr{H}_{\text{спокою}} = L\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\overline{\eta}} \rho g y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Отже, внесок хвилі в енергію стовпчика рідини, що розглядається, складає

$$\mathscr{H}_{\text{хвилі}} = \mathscr{H}_{\text{повна}} - \mathscr{H}_{\text{спокою}} = L \int\limits_0^{\lambda} \int\limits_{-h}^{\eta(\theta)} \frac{\rho v^2}{2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + L \int\limits_0^{\lambda} \int\limits_{\overline{\eta}}^{\eta(\theta)} \rho g y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Відношення цієї величини до площі $L \cdot \lambda$ основи стовпчика і прийнято називати (див., наприклад, [62, с. 204]) *густиною енергії хвилі* (енергія на одиницю горизонтальної площі)

$$E = K + U = \frac{\rho}{2\lambda} \int\limits_0^{\lambda} \int\limits_{-h}^{\eta(\theta)} v^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \frac{\rho g}{2\lambda} \int\limits_0^{\lambda} \left(\eta^2(\theta) - \overline{\eta}^2\right) \mathrm{d}x, \qquad (37)$$

де K і U — відповідно густини кінетичної і потенціальної енергії хвилі.

Імпульс одиниці об'єму рідини (густина потоку рідини) є $\rho \boldsymbol{v}$ [17, с. 27]. Тоді густина потоку рідини, що переноситься в напрямі розповсюдження хвилі, є ρv_x. Відповідно до густини енергії хвилі *густина імпульсу хвилі* (імпульс на одиницю горизонтальної площі) визначається як

$$I = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^{\lambda} \int\limits_{-h}^{\eta(\theta)} \rho v_x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \qquad (38)$$

2.1.8. Загальний розв'язок рівняння Лапласа. Шукатимемо частинний розв'язок рівняння Лапласа (13) методом розділення змінних:

$$\Phi(x,\, y,\, t) = X(x - ct)\, Y(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\kappa^2.$$

Тоді

$$\begin{aligned} X(x-ct) &= X_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\kappa(x-ct)} + X_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\kappa(x-ct)}, \\ Y(y) &= Y_1\, \mathrm{e}^{\kappa y} + Y_2\, \mathrm{e}^{-\kappa y}. \end{aligned}$$

Оскільки розв'язок має бути періодичним за координатою x з періодом $\lambda = 2\pi/k$ (k — хвильовий вектор), то $\kappa = nk$, де n — натуральне число. При цьому мають виконуватись:

1. Гранична умова на дні (27), звідки маємо

$$Y_1\,\mathrm{e}^{-nkh} - Y_2\,\mathrm{e}^{nkh} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Y_1 = Y_2\,\mathrm{e}^{2nkh}.$$

2. Граничний перехід при $h \to \infty$ (глибока вода). Для цього функція $Y(y)$ має бути обмеженою ($Y_2 \to 0$) і не залежати від глибини h ($Y_1 \neq f(h)$) при $h \to \infty$. Ці умови задовольняються, якщо зробити нормування

$$Y_2 = A_2\,\frac{\mathrm{e}^{-nkh}}{\mathrm{e}^{nkh} + \mathrm{e}^{-nkh}} \quad \Rightarrow \quad Y_1 = A_2\,\frac{\mathrm{e}^{nkh}}{\mathrm{e}^{nkh} + \mathrm{e}^{-nkh}}\,.$$

Сталу A_2 включимо в функцію X, перепозначивши $C_1 = X_1 \cdot A_2$ і $C_2 = X_2 \cdot A_2$.

3. Умова дійсності потенціалу Φ

$$\Phi^* = \Phi \quad \Rightarrow \quad C_1^* = C_2.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&\Phi(x,\ y,\ t) = X(x - ct)\,Y(y);\\
&X(x) = C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nkx} + C_n^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nkx} = 2\big(\mathrm{Re}C_n\cos(nkx) - \mathrm{Im}C_n\sin(nkx)\big);\\
&Y(y) = T_n\,\mathrm{e}^{nky} + T_{-n}\,\mathrm{e}^{-nky} = \frac{\mathrm{ch}\big(nk(y+h)\big)}{\mathrm{ch}(nkh)};\\
&\qquad T_n = \frac{\mathrm{e}^{nkh}}{\mathrm{e}^{nkh} + \mathrm{e}^{-nkh}} = \frac{1}{2}\big(1 + \mathrm{th}(nkh)\big).
\end{aligned} \tag{39}$$

Загальний розв'язок рівняння Лапласа є лінійною комбінацією всіх частинних розв'язків ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\Phi(x,\ y,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(C_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nk(x-ct)} + C_n^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nk(x-ct)}\Big)\times \Big(T_n\,\mathrm{e}^{nky} + T_{-n}\,\mathrm{e}^{-nky}\Big). \tag{40}$$

Для симетричних хвиль має виконуватись співвідношення $\Phi_y(\theta) = -\Phi_y(-\theta)$, що приводить до такої умови симетричності хвилі:

$$C_n^* = -C_n, \tag{41}$$

тобто коефіцієнти C_n мають бути уявними.

Дослідимо спочатку лінійне наближення, коли в загальний розв'язок дає внесок лише основний ($n = 1$) частинний розв'язок (перша гармоніка).

2.1.9. Хвилі нескінченно малої амплітуди (лінійне наближення). Знайдемо, коли можна знехтувати нелінійністю граничних умов. Оцінимо порядок величини доданків у рівнянні Ейлера (8):

$$|(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}| \simeq \frac{v\delta v}{\delta r}, \quad \left|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right| \simeq \frac{\delta v}{\delta t},$$

де δv, δr, δt — характерні зміни відповідно швидкості, відстані й часу. Для оцінки руху хвиль можна вважати $\delta r \simeq \lambda$ — довжина хвилі, $\delta t \simeq T$ — період хвилі. Тоді

$$\frac{|(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}|}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|} \simeq \frac{vT}{\lambda} = \frac{v}{c} \simeq \frac{H}{\lambda} = A.$$

Таким чином, нелінійний доданок $|(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}|$ малий порівняно з лінійним доданком $\left|\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|$, якщо $H \ll \lambda$ ($A \ll 1$), тобто амплітуда хвиль значно менша за їх довжину [17, с. 55]. Хвилі, для яких внесок нелінійності знехтовно малий (це досягається при $A \to 0$), називаються *лінійними* або *хвилями нескінченно малої амплітуди*. Дослідженню лінійних хвиль присвячено чимало матеріалу в багатьох підручниках і монографіях, зокрема, див. Лемб [16, с. 455–520], Уізем [35, с. 420–437], Кочін та ін. [13, с. 414–447], Сретенський [33, с. 18–53], Монін [20, с. 136–145]. Розглянемо основні властивості лінійних хвиль.

Таблиця 1

Швидкість, частота і період лінійних хвиль при кількох різних значеннях довжини хвилі у випадку глибокої води ($g = 9.8\,м/с^2$)

λ, м	1	2π	10	50	100
c, м/с	1.25	3.13	3.95	8.83	12.49
ω, $с^{-1}$	7.85	3.13	2.48	1.11	0.78
T, с	0.80	2.01	2.53	5.66	8.01

Швидкість c і профіль хвилі знаходимо з граничних умов на вільній поверхні. В лінійному наближенні всі похідні на вільній поверхні $y = \eta(x,\ t)$ записуються на нульовому рівні $y = 0$ (оскільки наступні члени відповідного розкладу в ряд Тейлора навколо незбуреного рівня $y = 0$ є вищого порядку малості за параметром A). Тоді кінематична і динамічна граничні умови (28) і (35) набувають такого вигляду:

$$\eta_x = -\frac{1}{c}\,\Phi_y\big|_{y=0}, \tag{42}$$

$$\eta = \frac{c}{g}\,\Phi_x\big|_{y=0}. \tag{43}$$

Виключаючи профіль вільної поверхні, одержимо

$$\left(\frac{c^2}{g}\,\Phi_{xx} + \Phi_y\right)\bigg|_{y=0} = 0. \tag{44}$$

Підставляючи в дане рівняння розв'язок (39) рівняння Лапласа при $n = 1$ (лінійне наближення), знаходимо

$$c^2 = \frac{g}{k}\,\mathrm{th}(kh) \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kh). \tag{45}$$

Дане співвідношення виражає залежність швидкості (частоти) хвилі від її хвильового вектора (довжини), тобто між часовими й просторовими характеристиками хвилі. Така залежність називається *дисперсією* хвилі [17, с. 57].

Функція $\mathrm{th}(kh)$ швидко прямує до одиниці з ростом kh. Наприклад, вже при $kh = 20$ маємо $1 - \mathrm{th}(kh) \approx 8.5 \cdot 10^{-18}$, а при $kh = 100$

маємо $1-\operatorname{th}(kh) \approx 2.8\cdot 10^{-87}$. Таким чином, навіть випадок $kh=20$ можна з великою точністю ($\approx 10^{-15}\%$) вважати випадком нескінченної глибини (глибокої води), а тим більше й вищі значення kh. Таким чином, під *глибокою водою* (*нескінченною глибиною*) надалі будемо розуміти випадок, коли $\operatorname{th} kh \simeq 1$, але при цьому глибина h не настільки велика, що стає суттєвим зміна густини рідини внаслідок зміни тиску (див. розділ 2.2.3). Для випадку глибокої води в табл. 1 наведено чисельні значення швидкості, частоти і періоду лінійних хвиль при кількох різних значеннях довжини хвилі.

Профіль вільної поверхні в лінійному наближенні знаходимо з граничної умови (43), враховуючи співвідношення (39):

$$\begin{aligned}\eta = \frac{\mathrm{i}ck}{g}\Big(C_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} + C_1^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-ct)}\Big) &= \\ -\frac{2ck}{g}\Big(\operatorname{Re}C_1\sin\big(k(x-ct)\big) + \operatorname{Im}C_1\cos\big(k(x-ct)\big)\Big)&.\end{aligned} \tag{46}$$

Якщо хвиля *симетрична*, то $\eta(x-ct)=\eta(-x+ct)$, звідки $\operatorname{Re}C_1 = 0$. Тоді остаточно одержуємо

$$\eta = a\cos(kx-\omega t), \quad a = -\frac{2ck}{g}\operatorname{Im}C_1; \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{ga}{\omega}\sin(kx-\omega t)\big(T_1^+\,\mathrm{e}^{ky} + T_1^-\,\mathrm{e}^{-ky}\big) &= \\ \frac{ga}{\omega}\sin(kx-\omega t)\,\frac{\operatorname{ch}\big(k(y+h)\big)}{\operatorname{ch}(kh)}&.\end{aligned} \tag{48}$$

Величина a в лінійному випадку є *висотою* $\eta(0)$ *хвилі над рівнем спокійної води*.

Для розподілу швидкостей маємо

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \Phi_x = \frac{g}{\omega}\,ak\cos(kx-\omega t)\,\frac{\operatorname{ch}\big(k(y+h)\big)}{\operatorname{ch}(kh)};\\ v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \Phi_y = \frac{g}{\omega}\,ak\sin(kx-\omega t)\,\frac{\operatorname{sh}\big(k(y+h)\big)}{\operatorname{ch}(kh)}.\end{aligned} \tag{49}$$

При цьому густина імпульсу хвилі I, розрахована за формулою

(38), в лінійному наближенні за малим параметром ak дорівнює нулю. Таким чином, *лінійні хвилі не спричиняють перенос маси — в лінійному наближенні траєкторії частинок рідини є замкненими симетричними лініями*. Вигляд цих ліній одержується з рівнянь (49), де швидкості Φ_x і Φ_y необхідно лінеаризувати навколо рівноважного положення частинки $x = x_0$, $y = y_0$, відкинувши нелінійні доданки за малим параметром ak. Тоді, враховуючи закон дисперсії (45), маємо

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -\,a\sin(kx_0 - \omega t)\,\frac{\operatorname{ch}\bigl(k(y_0+h)\bigr)}{\operatorname{sh}(kh)}\,; \\ y - y_0 &= \,a\cos(kx_0 - \omega t)\,\frac{\operatorname{sh}\bigl(k(y_0+h)\bigr)}{\operatorname{sh}(kh)}\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Отже, частинки рідини в лінійній хвилі рухаються за годинниковою стрілкою по *еліпсах*

$$\frac{(x-x_0)^2}{\left(\dfrac{a\operatorname{ch}\bigl(k(y_0+h)\bigr)}{\operatorname{sh}(kh)}\right)^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\left(\dfrac{a\operatorname{sh}\bigl(k(y_0+h)\bigr)}{\operatorname{sh}(kh)}\right)^2} = 1, \tag{51}$$

у яких горизонтальна вісь більша за вертикальну. При цьому період обертання частинок $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c}$. Для *глибокої води* ($h \to \infty$) еліпси перетворюються на *кола*.

Густина енергії хвилі, розрахована за формулою (37), в лінійному наближенні виражається як

$$E = K + U, \quad K = U = \frac{\rho g a^2}{4}, \tag{52}$$

тобто для хвиль нескінченно малої амплітуди кінетична і потенціальна енергії дають рівнозначний внесок у повну енергію хвилі.

2.2. Аналіз наближень канонічної моделі

2.2.1. В'язкість. Узагальненням рівняння Ейлера (8) при врахуванні в'язкості (внутрішнього тертя) рідини є *рівняння Нав'є-Стокса* [17, с. 73]

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g} + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\nabla(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}). \qquad (53)$$

Величини ν і ζ називаються коефіцієнтами в'язкості, причому ν — кінематичною в'язкістю, добуток $\mu = \nu\rho$ — динамічною в'язкістю, ζ — другою в'язкістю. Для справедливості рівняння Нав'є-Стокса коефіцієнти в'язкості μ і ζ необхідно вважати сталими. Коефіцієнти в'язкості рідин і газів суттєво залежать від температури. Для рідин кінематична і динамічна в'язкості спадають з підвищенням температури, а для більшості газів — зростають [18, с. 360–361]. Тому для виконання рівняння Нав'є-Стокса температуру слід вважати сталою, а також нехтувати залежністю коефіцієнтів в'язкості μ і ζ від інших величин (тиску, швидкості тощо). При температурі $T = 20°C$ для води $\nu = 10^{-6}\,м^2/с$, для повітря $\nu = 1.5\cdot 10^{-5}\,м^2/с$ [17, с. 74].

Оцінимо величину доданків з в'язкістю в рівнянні Нав'є-Стокса. Вважатимемо рідину нестисливою, тоді останній доданок дорівнює нулю внаслідок умови (12). Нехай δv, δr, δt — характерні зміни відповідно швидкості, відстані й часу, а $u = \delta r/\delta t$ — швидкість характерних змін механічного стану рідини. Тоді

$$\frac{|\nu\Delta\boldsymbol{v}|}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right|} \simeq \frac{\nu\,\delta v/(\delta r)^2}{\delta v/\delta t} = \frac{\nu\delta t}{(\delta r)^2} = \frac{\nu}{u\delta r} = \frac{1}{\mathfrak{Re}}. \qquad (54)$$

Таким чином, відносний внесок в'язкості за порядком величини обернено пропорційний до *числа Рейнольдса* $\mathfrak{Re}$ [17, с. 87]. При великих числах Рейнольдса в'язкістю можна нехтувати. При цьому рідину називатимемо *нев'язкою*.

Для оцінки руху хвиль можна вважати $\delta r \simeq \lambda$ — довжина хвилі, $\delta t \simeq T$ — період хвилі, $u = c$ — фазова швидкість хвилі. Тоді, використовуючи значення з табл. 1, для хвиль на воді маємо $\mathfrak{Re} \approx 2 \cdot 10^7$ при $\lambda = 2\pi\,м$. Отже, внесок в'язкості в динаміку таких хвиль складає $\approx 10^{-5}\%$. Для того, щоб зрозуміти малість цього внеску, оцінимо, як гравітаційні хвилі на поверхні води затухають з часом. Коефіцієнт затухання амплітуди лінійних хвиль $\gamma = 2\nu k^2$ (див. [17, с. 135] або [16, с. 785]). Тоді час релаксації хвилі (за який амплітуда зменшиться вдвічі) $\tau = \frac{\ln 2}{\gamma}$, а відстань, що хвиля пройде за цей час, складає $L \simeq \tau\upsilon$, де υ — середня швидкість хвилі. Якщо вважати $\lambda = 2\pi\,м$, $\upsilon = 3\,м/с$, то $\gamma \approx 2 \cdot 10^{-6}\,с^{-1}$, $\tau \approx 96\,год$, $L \simeq 1040\,км$. Ці прості розрахунки підтверджуються на практиці. Відомо, що океанські хвилі, які утворюються під час шторму, можуть розповсюджуватись на відстані, що сягають тисяч кілометрів (див., наприклад, [19, с. 7]). На відстанях же кількох десятків метрів затуханням гравітаційних хвиль можна нехтувати.

Оцінимо тепер вплив в'язкості на рух самих частинок рідини. В лінійних хвилях частинки рідини за час, рівний періоду хвилі, описують замкнену траєкторію з розміром, значно меншим за довжину хвилі (див. розділ 2.1.9). Тому в формулі (54) потрібно, як і раніше, вважати $\delta t \simeq T$, проте δr вже гратиме роль характерного розміру траєкторій. Таким чином, одержуємо оцінку, що ефекти в'язкості у воді починають відігравати суттєву роль (порядка 1% при $T = 1\,с$) лише на масштабах $\delta r \approx 10^{-2}\,м$.

2.2.2. Вихровий рух. Якщо $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v} \neq 0$, то рух називається *вихровим*. Закон збереження циркуляції швидкості (10), а як наслідок і теорема Лагранжа, порушуються за виконання однієї з умов (див. [17, с. 33–34] або [18, с. 159–160]): (*i*) в'язкість відмінна від нуля; (*ii*) рух рідини неізентропічний; (*iii*) область потоку неоднозв'язна (наприклад, при обтіканні твердих тіл, коли утворюються поверхні розриву). В цих випадках у рідині утворюється вихровий рух навіть, якщо в початковий момент часу рух був потенціальним.

Оцінимо вплив в'язкості на потенціальність руху при розповсюдженні хвиль. Завихреність, що породжується плоскою лінійною хвилею внаслідок в'язкості, швидко затухає з глибиною [16, с. 790]:

$$\Omega_z = \Omega_z^{(0)}\,\mathrm{e}^{-\beta|y|}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}},$$

β — коефіцієнт затухання. Глибина, для якої завихреність зменшиться, наприклад, в 1000 разів (стане 0.1% від початкової), становить $|y| = \frac{\ln 1000}{\beta} \approx 5.5 \cdot 10^{-3}\,м$ у воді при $\lambda = 2\pi\,м$. При цьому $|y|/\lambda \approx 0.09\%$. Таким чином, для метрових хвиль врахування завихреності, що виникає внаслідок в'язкості води, суттєве лише на масштабах до $10^{-3}\,м$.

При обтіканні твердих тіл (неоднозв'язність області потоку) між поверхнею твердого тіла і рідиною завжди існують сили міжмолекулярного зчеплення, що викликають "прилипання" частинок рідини, що знаходяться на границі розділу, до твердої поверхні. При цьому сусідні прошарки рідини продовжують рухатись з різко зростаючими з відстанню від границі швидкостями, що призводить до завихреності потоку. Вихрі, що утворюються біля границі, переносяться разом з рідиною, беручи участь у конвекції, а, з іншого боку, дифундують у сусідні прошарки рідини. Область рідини, де в результаті утворюється вихровий рух, називається *пригранични м прошарком* [18, с. 497]. В цій області суттєві ефекти в'язкості, і потік не можна вважати потенціальним. Оцінимо розмір пригранично го прошарку.

Якщо рух вважати адіабатичним, рідину нестисливою і прискорення $\boldsymbol{g}$ сталим, то динаміка завихреності описується рівнянням

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega}\nabla)\boldsymbol{v} + \nu\Delta\boldsymbol{\Omega}, \qquad (55)$$

що одержується дією оператора rot на рівняння Нав'є-Стокса (53). Доданок $(\boldsymbol{\Omega}\nabla)\boldsymbol{v} = 0$, якщо рух плоский. Доданок $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{\Omega}$ описує *конвекцію завихреності* (вихрі переносяться разом з рідиною), а доданок $\nu\Delta\boldsymbol{\Omega}$ описує *дифузію завихреності* (вихрі розповзаються в сусідні області рідини). Таким чином, в'язкість спричиняє розширення області вихрового руху [36, с. 259]. Оцінимо, як відрізняються характерні масштаби дифузії d і конвекції L завихреності. Для цього оцінимо порядок величини дифузійного і конвективного доданків:

$$\left|\nu\Delta\boldsymbol{\Omega}\right| \simeq \frac{\nu\,\delta\Omega}{d^2}, \quad \left|(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{\Omega}\right| \simeq \frac{v\,\delta\Omega}{L},$$

де $\delta\Omega$ — характерна зміна завихреності. Якщо поле швидкості стаціонарне, то $\frac{\partial\Omega}{\partial t} = 0$, і для плоского руху $(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{\Omega} = \nu\Delta\boldsymbol{\Omega}$. Тоді

$$\frac{d}{L} \simeq \sqrt{\frac{\nu}{vL}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Re}}},$$

де $\mathfrak{Re}$ — число Рейнольдса потоку рідини в системі відліку, де поле швидкості стаціонарне. Масштаб дифузії завихреності при великих числах Рейнольдса (малій в'язкості) значно менший за масштаб конвекції завихреності [18, с. 498–499].

Для оцінки руху хвиль можна вважати $v \simeq c$ — швидкість руху власної системи відліку хвилі, де поле швидкості стаціонарне (для лінійних хвиль швидкість руху частинок рідини в лабораторній, тобто нерухомій відносно дна, системі відліку значно менша за швидкість самої хвилі), а характерний масштаб конвекції $L \simeq \lambda$. В цьому випадку $\mathfrak{Re} \simeq 10^6 \div 10^7$ при $L \simeq 1 \div 10$ *м*, а, отже, $d/L \simeq 10^{-4} \div 10^{-3}$. Таким чином, при малій в'язкості поперечний до напряму потоку масштаб приграничного прошарку (що обумовлюється дифузією) значно менший за його характерний поздовжній масштаб (що визначається конвекцією). Внаслідок цього в граничних умовах на твердих поверхнях існуванням приграничного прошарку при малій в'язкості можна нехтувати на масштабах $\gtrsim 10^{-3}$ *м* для метрових хвиль.

Дослідження пограничного прошарку в нев'язкій рідині суттєве для вивчення вихрового сліду, що залишається при обтіканні твердих тіл, наприклад, при врахуванні топографії дна. При цьому не справджується граничний перехід $\nu \to 0$ ($\mathfrak{Re} \to \infty$), і течія ніколи не зводиться до випадку ідеальної рідини. Це пов'язано з тим, що дифузійний доданок $\nu\Delta\mathbf{\Omega}$ не прямує до нуля при $\nu \to 0$, оскільки при цьому $\mathbf{\Omega}$ у пограничному прошарку набуває дуже швидких змін, що компенсують малість ν [36, с. 266]. Це є причиною кількох парадоксів ідеальної рідини в гідродинаміці, що детально описані в монографії Біркгофа [3]. На завершення зауважимо, що при великих числах $\mathfrak{Re}$ $\left(\gtrsim 10^4 \div 10^5\right)$ потік у приграничному прошарку є турбулентним (хаотичним) на відміну від ламінарного (регулярного) потоку при менших числах $\mathfrak{Re}$. Проте турбулентність внаслідок малості масштабу дифузії порівняно з масштабом конвекції знову ж таки не проникає в область потенціального ламінарного руху на відстань, більшу за товщину приграничного прошарку [17, с. 208–209].

2.2.3. Стисливість рідини. Дослідимо, коли в рівняннях неперервності (7) і Ейлера (8) густину можна вважати сталою в усій рідині.

1. *Рівняння неперервності*. Густину в рівнянні неперервності можна вважати сталою, якщо відносні зміни густини є вищого порядку малості за відносні зміни швидкості. Дійсно, нехай δv, δr, δt — характерні зміни відповідно швидкості, відстані й часу, а

$u = \delta r/\delta t$ — швидкість характерних змін механічного стану рідини. Просторовою зміною густини $\delta\rho^{(r)}$ можна нехтувати, якщо

$$\frac{|\boldsymbol{v}\nabla\rho|}{|\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}|} \simeq \frac{v\,\delta\rho^{(r)}/\delta r}{\rho\,\delta v/\delta r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\rho^{(r)}}{\rho} \ll \frac{\delta v}{v}, \tag{56}$$

а часовою зміною густини $\delta\rho^{(t)}$ можна нехтувати, якщо

$$\frac{|\partial\rho/\partial t|}{|\rho\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}|} \simeq \frac{\delta\rho^{(t)}/\delta t}{\rho\,\delta v/\delta r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\rho^{(t)}}{\rho} \ll \frac{\delta v}{u}. \tag{57}$$

При ізентропічних процесах (ентропія $\mathcal{S}$ стала) зміна густини $\delta\rho$ в лінійному наближенні виражається через зміну тиску δp таким чином [17, с. 41]:

$$\delta\rho \simeq \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_{\mathcal{S}} \delta p \;=\; \frac{\delta p}{v_{зв}^2}\,, \tag{58}$$

де

$$v_{зв} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{\mathcal{S}}}$$

є швидкістю звуку [17, с. 351]. Для морської води за стандартне значення швидкості звуку приймають $v_{зв} = 1450\,м/с$, до якого додаються поправки на температуру, тиск і солоність [20, с. 11]. Для порівняння в повітрі $v_{зв} = 341\,м/с$ при температурі $15°C$ і атмосферному тиску [18, с. 104].

З рівняння Ейлера (8) випливає, що на будь-якому горизонтальному рівні зміна тиску визначається просторовою й часовою змінами швидкості. Просторова зміна тиску $\delta p^{(r)}$ виражається як

$$\delta p^{(r)} \simeq \rho\, v\, \delta v,$$

а відповідна зміна густини, враховуючи співвідношення (58), має вигляд

$$\frac{\delta\rho^{(r)}}{\rho} \simeq \frac{v\,\delta v}{v_{зв}^2} = \left(\frac{v}{v_{зв}}\right)^2 \frac{\delta v}{v}.$$

Часова зміна тиску $\delta p^{(t)}$ виражається як

$$\delta p^{(t)} \simeq \rho\,\frac{\delta r}{\delta t}\,\delta v = \rho\, u\, \delta v,$$

а відповідна зміна густини

$$\frac{\delta \rho^{(t)}}{\rho} \simeq \left(\frac{u}{v_{зв}}\right)^2 \frac{\delta v}{u}.$$

Порівнюючи дані вирази з співвідношеннями (56) і (57), бачимо, що в рівнянні неперервності рідину можна вважати *нестисливою*, тобто *нехтувати зміною густини при зміні тиску*, за виконання умов

$$\left(\frac{v}{v_{зв}}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{u}{v_{зв}}\right)^2 \ll 1. \tag{59}$$

Величина $v/v_{зв}$ називається *числом Маха*. Отже, як швидкість руху рідини, так і швидкість характерних змін механічного стану рідини мають бути малими порівняно зі швидкістю звуку в цій рідині. При цьому виконання умови для швидкості u не менш важливе за виконання умови для швидкості v. Наприклад, при розповсюдженні звукових хвиль швидкості руху частинок рідини малі: $v \ll v_{зв}$, проте $u \simeq v_{зв}$, і ефекти стисливості є визначальними [31, с. 43]. Для оцінки ж руху поверхневих гравітаційних хвиль можна вважати $u = c$ — фазова швидкість хвилі, а $v \lesssim u$. Тоді для води при швидкості хвиль порядка $10\, м/с$ умова (59) виконується з точністю до $\approx 0.005\%$ — знехтовна величина.

2. *Рівняння Ейлера*. В рівнянні Ейлера густина входить у доданок

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + p\,\frac{\nabla \rho}{\rho^2}.$$

При цьому зміною густини можна нехтувати, якщо

$$\frac{|p\,\nabla\rho/\rho^2|}{|\nabla p/\rho|} \simeq \frac{\delta\rho/\rho}{\delta p/p} \equiv k \ll 1, \tag{60}$$

тобто відносна зміна густини значно менша за відносну зміну тиску.

Враховуючи співвідношення (58), умова, за виконання якої рідину можна вважати *нестисливою* в рівнянні Ейлера, набуває вигляду

$$k = \frac{p}{\rho v_{зв}^2} \ll 1. \tag{61}$$

Для оцінки тиску обиратимемо гідростатичний тиск, усереднений по всій глибині:

$$p \simeq p_0 + \frac{1}{h}\int\limits_{-h}^{0} \rho g y \, \mathrm{d}y = p_0 + \frac{\rho g h}{2}, \tag{62}$$

де $p_0 = 101325\,\textit{Па}$ — атмосферний тиск. Тоді для води (густина $\rho \simeq 10^3\ \textit{кг}/\textit{м}^3$) умова (61) навіть при глибині $h = 4000\,\textit{м}$ виконується з точністю до $\approx 1\%$ ($k \approx 0.01$ при $g = 9.8\,\textit{м}/\textit{с}^2$). В розділі 2.1.9 було зроблено оцінку, що випадок $kh = 100$ можна з величезною точністю вважати випадком глибокої води. В цьому разі при $\lambda = 2\pi\ \textit{м}$ умова (61) виконується з точністю до $\approx 0.03\%$. Ефект стисливості на менших глибинах є ще більш знехтовним.

2.2.4. Теплоперенос. Нехай $\mathcal{S}$ — ентропія одиниці маси рідини. Тоді умова адіабатичності руху, тобто відсутності теплообміну між окремими частинками рідини, має вигляд [17, с. 17]

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\mathcal{S} = 0. \tag{63}$$

Якщо ж у початковий момент часу ентропія стала в усіх точках рідини, то вона залишиться сталою у всіх точках рідини й у всі наступні моменти часу, тобто рівняння адіабатичності набуває вигляду

$$\mathcal{S} = \mathrm{const}. \tag{64}$$

У цьому випадку рух називається *ізентропічним*.

Знайдемо розподіл температури з глибиною в рідині, що знаходиться в спокої в однорідному полі тяжіння при сталій ентропії. З умови адіабатичності (64) випливає

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} + \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p}\right)_T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0.$$

Враховуючи, що

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p, \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -g\rho,$$

де c_p — питома теплоємність при сталому тиску [17, с. 23], одержуємо

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} = -\frac{\beta_T g T}{c_p},$$

де величина

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

називається температурним коефіцієнтом розширення [17, с. 306]. Для води при температурі $20°C$ маємо $\beta_T \approx 2 \cdot 10^{-4}\, K^{-1}$, а $c_p \approx 4.18 \times 10^3\, Дж/(кг \cdot К)$ [10, с. 406–407]. Тоді зміна температури води при сталій ентропії в полі тяжіння складає $\approx 1°C$ на $7\, км$. Отже, при цьому температуру з великою достовірністю можна вважати сталою.

В реальних умовах градієнт температури може бути значно більшим. У верхніх прошарках світового океану (на глибині до $200\, м$) градієнт температури складає приблизно $5°C$ на $100\, м$ [20, с. 14]. Він обумовлюється теплообміном з атмосферою, нагріванням води за рахунок сонячного і земного випромінювання тощо. В результаті в рідині утворюється рух, що прагне відновити рівновагу температури. Такий рух, що виникає в полі тяжіння, називається *вільною конвекцією* [17, с. 306]. Зрозуміло, що такі процеси неадіабатичні, і рівняння (63) слід замінити на рівняння теплопереносу, де в загальному випадку враховуються ефекти

Таблиця 2

Відносна гідростатична/барометрична зміна тиску $\frac{\delta p}{p}$ (для морської води/повітря), відносна зміна густини $\frac{\delta\rho}{\rho}$ при градієнті температури $5°C/1°C$ на 100 *м* і відповідна оцінка справедливості умови сталості густини (60) $k \ll 1$ при різних значеннях глибини/висоти h

	Морська вода			Повітря		
h, *м*	$\frac{\delta\rho}{\rho}$, %	$\frac{\delta p}{p}$, %	k, %	$\frac{\delta\rho}{\rho}$, %	$\frac{\delta p}{p}$, %	k, %
1	0.0011	9.2	0.011	0.0034	0.012	29.3
10	0.011	65.2	0.016	0.034	0.12	29.3
100	0.11	165.7	0.063	0.34	1.2	29.3
200	0.21	181.3	0.12	0.68	2.3	29.3

теплопровідності (мікроскопічний перенос енергії, що не пов'язаний з макроскопічним рухом рідини) й в'язкості [17, с. 270–277]. Не зупиняючись детально на цих ефектах, оцінимо лише, наскільки при цьому суттєва залежність густини морської води від температури.

В лінійному наближенні зміна температури на δT призводить до зміни густини на (див. [17, с. 306])

$$\delta\rho \simeq \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \delta T \;=\; -\beta_T\,\rho\delta T. \qquad (65)$$

Зважаючи на це, можна оцінити справедливість умови (60), за виконання якої густину можна вважати сталою в рівнянні Ейлера, як це зроблено в табл. 2 для морської води при кількох різних значеннях глибини h. При цьому для оцінки тиску використовується співвідношення (62), а відносна зміна тиску за порядком величини визначається як

$$\frac{\delta p}{p} \simeq h\Big/\left(\frac{p_0}{\rho g} + \frac{h}{2}\right).$$

де $\delta p = \rho g h$ — гідростатичний перепад тиску. Видно, що в рівнянні Ейлера залежністю густини морської води від температури при обраному градієнті можна нехтувати навіть при $h = 200\,м$ з точністю до $\approx 0.1\%$.

Відносна зміна густини, наведена в табл. 2, дає також інформацію про те, чи можна в нашому випадку нехтувати зміною густини при зміні температури в рівнянні неперервності. При хвильовому русі частинки рідини здійснюють коливальний рух, тому зміни їх швидкості порівняні з самими швидкостями: $\delta v \simeq v$. Тому, зважаючи на умову (56), відносна просторова зміна густини має бути значно меншою за одиницю. Видно, що навіть при $h = 200\,м$ ця умова виконуються з точністю до $\approx 0.2\%$. Часові температурні зміни густини виражаються через часові зміни температур і визначаються ефектами теплопровідності й конвекції. На великих масштабах цією залежністю з достатньою точністю можна нехтувати. Ефекти теплопровідності суттєві лише на масштабах приграничного прошарку подібно до ефектів в'язкості. При цьому відношення товщин вихрового d і температурного d_T приграничних прошарків визначається числом Прандтля $\mathcal{P}$ [18, с. 500]:

$$\frac{d}{d_T} \simeq \sqrt{\frac{\nu}{\chi}} = \sqrt{\mathcal{P}}\,,$$

де χ — коефіцієнт температуропровідності. Для води $\mathcal{P} = 6.75$ [17, с. 294]. Ефекти ж конвекції суттєво впливають на розподіл густини, а як наслідок і швидкості, при значно більших градієнтах температур. Наприклад, конвекція Релея-Бенара у воді виникає при градієнті $\approx 1°C$ на $0.5\,см$ [5, с. 306].

Зауважимо, що градієнт температур у світовому океані не є сталим і суттєво залежить від солоності води [20, с. 14], причому в загальному випадку необхідно розглядати термодинаміку двокомпонентної суміші. Результуюча залежність густини морської води від глибини є нелінійною і зростає від $\approx 1025\,кг/м^3$ на поверхні до $\approx 1028\,кг/м^3$ на великій глибині, причому головна зміна густини відбувається на глибині від $\approx 50\,м$ до $\approx 1\,км$ [93, с. 897]. Відносна зміна густини при цьому складає $\approx 0.3\%$.

Для порівняння в табл. 2 також наведені розрахунки для атмосфери Землі. При цьому відносна зміна тиску в наближенні ідеального газу визначається з барометричної формули [31, с. 11]

$$\frac{\delta p}{p} = -\frac{\mu g}{RT}\,h, \tag{66}$$

де $R = 8.31\,Дж/(моль \cdot K)$ — універсальна газова стала, $\mu = 2.9\times \times 10^{-2}\,кг/моль$ — відносна молярна маса повітря, $h = \delta y$ — висота стовпчика повітря, що розглядається. Для повітря температурний коефіцієнт розширення одержується в наближенні ідеального газу з рівняння Менделєєва-Клапейрона: $\beta_T = \frac{1}{T} \approx 3.4 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$ при $T = 20°C = 293\,K$, а градієнт температури в атмосфері Землі складає приблизно $1°C$ на $100\,м$ [93, с. 899]. Видно, що оскільки в ідеальному газі $p \sim \rho$, то коефіцієнт k не залежить від висоти h, проте його значення свідчить про суттєву роль залежності густини повітря від температури на відміну від води.

Завдяки цьому неоднорідність температури в атмосфері викликає інтенсивну циркуляцію повітря, що є причиною утворення вітру й конвективної нестійкості атмосфери, які відіграють вирішальну роль у зміні погоди й важливі для моделювання клімату (див. детальніше [93, с. 899–909]). При цьому динаміка хвиль на морській поверхні суттєво залежить від зміни параметрів атмосфери. Дослідженням цих питань займається окремий розділ геофізики — геофізична гідродинаміка, головним положенням якої присвячена монографія Моніна [20]. У даній же роботі вважатимемо, що атмосфера знаходиться в стані термодинамічної і механічної рівноваги, щоб зосередитись на вивченні фундаментальних властивостей хвиль на воді.

2.2.5. Атмосферний тиск. У динамічній граничній умові (35) зроблене припущення, що атмосферний тиск сталий на всій вільній поверхні. Насправді ж атмосферний тиск змінюється з висотою й в наближенні ідеального газу оцінюється барометричною формулою (66). З табл. 2 видно, що для різниці висот порядка 10 *м* відносна зміна атмосферного тиску складає $\approx 0.1\%$.

Для строгого врахування зміни атмосферного тиску на вільній поверхні також необхідно зважити на те, що будь-яке збурення поверхні призводить до деякого руху повітря [35, с. 417]. Таким чином, задачу про рух хвиль на поверхні рідини більш точно необхідно формулювати як задачу на межі розділу двох середовищ — рідини й повітря. В цьому випадку закон дисперсії хвиль у лінійному наближенні має такий вигляд (див. [13, с. 442] або [17, с. 61]):

$$c^2\left(\frac{\rho}{\mathrm{th}(kh)}+\frac{\rho'}{\mathrm{th}(kh')}\right)=\frac{(\rho-\rho')g}{k},$$

де ρ' і h' — відповідно густина й вертикальна товщина верхнього середовища в стані спокою. Якщо вважати $h'\to\infty$ і $\rho'\ll\rho$, то закон дисперсії записується як

$$c^2\approx c_0^2\Big(1-\big(1+\mathrm{th}(kh)\big)\frac{\rho'}{\rho}\Big),\quad c_0^2=\frac{g}{k}\,\mathrm{th}(kh), \tag{67}$$

де c_0 — фазова швидкість хвилі при $\rho'=0$.

З рівняння Бернуллі (29) зміна тиску δp, що викликається зміною фазової швидкості хвилі на δc, визначається як $\delta p\simeq \simeq\rho\,\delta(c^2)/2$. Тоді, враховуючи закон дисперсії (67), для відносної зміни тиску одержуємо при $h\to\infty$ максимальну з можливих оцінок:

$$\frac{\delta p}{p_0}\simeq\frac{\rho' c_0^2}{p_0},$$

де $p_0=101325\,Па$ — атмосферний тиск. Для повітря $\rho'\approx 1.29\,кг/м^3$ [10, с. 405]. Тоді при $\lambda=2\pi\,м$ ($c_0\approx 3.13\,м/с$) відносна зміна тиску становить $\approx 0.012\%$, а при $\lambda \approx 65\,м$ ($c_0 = 10\,м/с$) відповідно $\approx 0.13\%$. Зміна тиску внаслідок руху повітря при розповсюдженні гравітаційних хвиль на воді стає суттєвим ($\approx 3\%$) при фазових швидкостях порядку $50\,м/с$.

Хоча рух повітря внаслідок руху хвиль мало впливає на їх фазову швидкість, атмосфера суттєво впливає на лінійний коефіцієнт затухання гравітаційних хвиль, що у випадку нескінченної глибини має вигляд (Дор [70], 1978 р.)

$$\gamma' = \gamma + \frac{\rho'}{\rho}\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}(\gamma\omega)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega = \left(\frac{gk(\rho-\rho')}{(\rho+\rho')}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{68}$$

де $\gamma = 2\nu k^2$ — коефіцієнт затухання лінійних хвиль без врахування повітря. Для системи вода-повітря $\nu = 10^{-6}\,м^2/с$, $\nu' = 1.5 \times \times 10^{-5} м^2/с$, тоді при $\lambda = 2\pi\,м$ коефіцієнт затухання $\gamma \approx 2\cdot 10^{-6}\,с^{-1}$, а $\gamma' \approx 1.45\cdot 10^{-5}\,с^{-1}$. Відповідно час релаксації, за який амплітуда хвилі зменшиться вдвічі, складає $\tau \approx 96$ *год* для системи вода–вакуум і $\tau \approx 13$ *год* для системи вода–повітря.

2.2.6. Поверхневий натяг. Викривлення поверхні рідини створює поверхневі напруження, що носять назву поверхневого натягу. Відповідні сили, що спрямовані по дотичній до поверхні, називаються *капілярними* або силами поверхневого натягу. При збільшенні площі елемента поверхні на δS, його поверхнева енергія збільшується на $\mathcal{T}\delta S$ [17, с. 333]. Коефіцієнт $\mathcal{T}$ називається коефіцієнтом поверхневого натягу і залежить від характеру обох середовищ на границі розділу і температури [13, с. 444]. На зміну поверхневої енергії витрачається робота зовнішніх сил тиску. Таким чином, поверхневий натяг призводить до зміни тиску між двома середовищами. Без зменшення загальності вважатимемо, що невикривлена границя розділу середовищ горизонтальна, а нормаль до поверхні при цьому спрямована вгору. Тоді різниця тисків при переході з нижнього до верхнього середовища визначається з умови термодинамічної рівноваги

$$\iint\limits_{\sigma} (p - p_0)\delta\eta \, \mathrm{d}S = \mathcal{T}\delta S, \tag{69}$$

де $\delta\eta$ — вертикальне зміщення поверхні σ. Видно, що оскільки $\delta S > 0$, то при $\delta\eta > 0$ (поверхня опукла вгору) $p > p_0$, а при $\delta\eta < 0$ (поверхня опукла вниз) $p < p_0$. Отже, тиск більший в тому середовищі, для якого поверхня опукла.

Нехай $y = \eta(x,\ z)$ — рівняння поверхні. Тоді її площа визначається таким поверхневим інтегралом [4, с. 333]:

$$S = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z.$$

Проваріювавши цей функціонал, отримаємо співвідношення між варіацією площі поверхні δS та варіацією вертикального зміщення поверхні $\delta\eta$. Тоді після підстановки δS у формулу (69) остаточно одержимо

$$p - p_0 = -\mathcal{T}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta_x}{\sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\eta_z}{\sqrt{1 + \eta_x^2 + \eta_z^2}}\right)\right), \tag{70}$$

або в двовимірному випадку

$$p - p_0 = -\mathcal{T}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta_x}{\sqrt{1 + \eta_x^2}}\right) = -\mathcal{T}\frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\mathcal{T}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}l}, \tag{71}$$

де $\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ — елемент довжини кривої. Це і є доданок, який потрібно додати до лівої частини динамічної граничної умови (35), щоб врахувати поверхневий натяг. Оскільки при цьому $\overline{p} = p_0$, то поверхневий натяг не дає внесок у константу Бернуллі та співвідношення Леві-Чевітта.

З врахуванням поверхневого натягу лінійний закон дисперсії має вигляд

$$c^2 = \frac{g}{k}\,\mathrm{th}(kh)\big(1 + \varkappa\big) \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 = gk\,\mathrm{th}(kh)\big(1 + \varkappa\big), \tag{72}$$

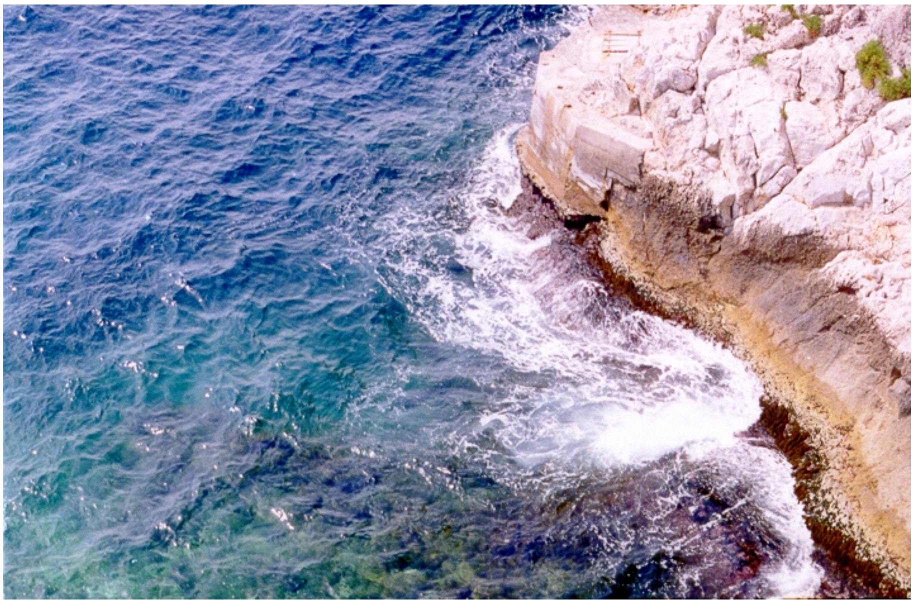


Рис. 3. Дрібномасштабні (капілярні) хвилі на морській поверхні (Середиземноморське узбережжя, Монако).

де величина

$$\varkappa = \frac{\mathcal{T}k^2}{\rho g} = \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^2$$

є безрозмірним коефіцієнтом поверхневого натягу, а $\lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\rho g}}$ носить назву капілярної довжини. Видно, що поверхневим натягом можна нехтувати, якщо $\varkappa \ll 1$, тобто $\lambda \gg \lambda_m$. У протилежному випадку $\lambda \ll \lambda_m$ рух хвиль на поверхні рідини визначається головним чином поверхневим натягом, а ефектами гравітації можна нехтувати. Такі хвилі називаються *капілярними* [17, с. 342]. Відомим прикладом капілярних хвиль є брижі на воді (див. рис. 3). У проміжному випадку кажуть про капілярно-гравітаційні або гравітаційно-капілярні хвилі залежно від того, які ефекти важливіші.

Для системи вода–повітря $\mathcal{T} \approx 0.074\,\textit{Дж}/\textit{м}^2$ [33, с. 270], при цьому $\lambda_m \approx 1.73\,\textit{см}$. Відносна зміна швидкості хвилі, що вноситься поверхневим натягом, дорівнює $\sqrt{1+\varkappa}\,-1$ і складає приблизно 0.015% при $\lambda = 1\,\textit{м}$, 0.004% при $\lambda = 2\,\textit{м}$, $1.5\cdot 10^{-4}\,\%$ при $\lambda = 10\,\textit{м}$. Отже, для метрових хвиль внеском поверхневого натягу в фазову швидкість хвилі можна з достатньою точністю нехтувати. Тим не менше, в будь-якому випадку поверхневий натяг відіграє суттєву роль для ефектів на масштабах порядка капілярної довжини, тобто на відстанях до $0.01 \div 0.1\,\textit{м}$.

2.2.7. Інші чинники. На завершення оцінимо радіальну зміну прискорення в гравітаційному полі Землі. Для цього використаємо найпростішу модель — вважатимемо Землю однорідною кулею. Прискорення в гравітаційному полі однорідної кулі радіуса R задається таким чином [27, с. 80]:

$$g = g_0 \frac{r}{R}, \ \ r \le R; \qquad g = g_0 \frac{R^2}{r^2}, \ \ r \ge R;$$

де r — відстань від центра кулі, g_0 — прискорення на поверхні. Тоді, якщо $y = r - R$ — радіальна відстань від поверхні кулі, то зміна прискорення δg при зміні радіальної відстані на δy оцінюється як

$$\frac{\delta g}{g} \simeq \frac{\delta y}{R}.$$

Радіус Землі дорівнює $\approx 6.35 \cdot 10^6\,\textit{м}$. Тоді для $\delta y = 200\,\textit{м}$ відносна зміна прискорення в полі тяжіння складає $\approx 0.003\%$ — знехтовна величина.

В реальних умовах існує ще багато чинників, що впливають на хвильовий рух морської поверхні. Зокрема, гравітаційні поля Місяця і Сонця внаслідок обертання Землі викликають приливні та відливні хвилі [93, с. 888–892], що описуються приливним рівнянням Лапласа [20, с. 66]. Зміна за меридіаном сили Коріоліса призводить до повороту напряму природних течій в гідросфері й атмосфері Землі, а хвилі, що при цьому створюються, носять назву хвиль Россбі-Блінової [20, с. 261]. На параметри води також впливають розчинені в ній кисень і CO_2, що проникають з атмосфери у вигляді бульбашок, котрі утворюються завдяки руйнуванню й перекиду хвиль (див. Баннер і Перегрін [43]). Оскільки розчинені в морській воді солі існують в ній у вигляді йонів, то під дією зовнішнього магнітного поля Землі в такому середовищі утворюються електричні поля, що призводять до руху частинок рідини. Відповідні процеси вивчає магнітогідродинаміка (див. монографії Моніна [20] та Селезова і Корсунського [32]). Багатьом іншим явищам на поверхні океану, таким як сулой, внутрішні хвилі, "мертва вода", циркуляції Ленгмюра, а також впливу на хвильовий рух поверхневих плівок і водоростей, присвячено книгу Моніна і Красицького [19]. Питанням впливу хвиль на кораблі та морські споруди присвячено підручник Ньюмена [26], а також оглядові статті Лайтхілла [92] та Фелтінсена [72].

Незважаючи на різноманітність розглянутих чинників, відправною моделлю для дослідження поверхневих хвильових явищ є канонічна модель гідродинаміки. Хоча ця модель і є ідеалізованою, вона, незважаючи на всі спрощення, відображає реальні властивості занадто складної для повного математичного опису фізичної системи, такої як поверхня океану. Подібні моделі складають основу дослідження будь-якого фізичного явища [11, с. 101]. Детальному вивченню розв'язків канонічної моделі гідродинаміки й присвячено увесь подальший матеріал.

2.3. Хвилі скінченної амплітуди

2.3.1. Канонічна модель. Безрозмірні рівняння і величини. Для подальших досліджень обезрозміримо рівняння канонічної моделі. Оберемо одиниці довжини r, часу t і маси m так, щоб у безрозмірних змінних $k^Б = g^Б = \rho^Б = 1$. Для цього всі довжини віднормуємо на величину, обернену до хвильового вектора k, а час — на величину, обернену до частоти $\omega_0 = \sqrt{gk}$ — лінійної частоти хвилі для нескінченної глибини. Тоді зв'язок між безрозмірними й розмірними величинами виражається співвідношеннями

$$r^{Б} = r^{Р} \cdot k, \quad h^{Б} = h^{Р} \cdot k, \quad t^{Б} = t^{Р} \cdot \omega_0, \quad m^{Б} = \frac{k^3}{\rho} m^{Р},$$
$$v^{Б} = \frac{v^{Р}}{c_0},\ \nabla^{Б} = \frac{\nabla^{Р}}{k},\ \Phi^{Б} = \frac{k}{c_0}\Phi^{Р},\ E^{\,Б} = \frac{k^2}{\rho g}E^{\,Р},\ I^{\,Б} = \frac{k^2}{\rho\omega_0}I^{\,Р}, \tag{73}$$

де $c_0 = \omega_0/k$ — лінійна фазова швидкість хвилі у випадку нескінченної глибини. При цьому $\lambda^{Б} = 2\pi$, $\omega^{Б} = c^{Б}$, $\theta^{Б} = x^{Б} - c^{Б} \cdot t^{Б}$,

$$\frac{\partial}{\partial x^{Б}} = \frac{\partial}{\partial \theta^{Б}}.$$

У безрозмірних змінних (відповідний індекс опускаємо) рівняння канонічної моделі набувають вигляду

$$\Phi_{\theta\theta} + \Phi_{yy} = 0, \quad -h \leqslant y \leqslant \eta(\theta); \tag{74}$$

$$\frac{1}{2}\Big(\big(c - \Phi_\theta\big)^2 + \Phi_y^2\Big) + \eta = B, \quad y = \eta(\theta),$$
$$B = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{2}\,\overline{\Phi_\theta^2}\,|_{y=-h} + \overline{\eta}\ ; \tag{75}$$

$$\big(c - \Phi_\theta\big)\eta_\theta + \Phi_y = 0, \quad y = \eta(\theta); \tag{76}$$

$$\Phi_y = 0, \quad y = -h. \tag{77}$$

Дана система рівнянь при фіксованій глибині h визначає невідомі потенціал швидкості $\Phi(\theta,\ y)$, профіль вільної поверхні $\eta(\theta)$ і фазову швидкість хвилі c залежно лише від одного безрозмірного параметру — амплітуди (крутизни) хвилі $A = H^{Р}/\lambda^{Р} = H^{Б}/2\pi$ (H — висота хвилі):

$$A = \frac{\eta(0) - \eta(\pi)}{2\pi}. \tag{78}$$

З рівняння Бернуллі (75) одержуємо також інший вираз

$$A = \frac{q^2(\pi) - q^2(0)}{4\pi}, \tag{79}$$

де $q(0)$ і $q(\pi)$ — швидкості частинок рідини відповідно на гребені та впадині хвилі у власній системі відліку хвилі (де хвиля нерухома). Нульовий вертикальний рівень $y = 0$ обиратимемо на середньому рівні хвилі, так що $\overline{\eta} = 0$.

Коли потенціал швидкості й фазова швидкість знайдені, траєкторії частинок знаходяться з системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \Phi_\theta(\theta,\, y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \Phi_y(\theta,\, y). \tag{80}$$

У безрозмірних змінних фаза хвилі $\theta = x - ct$ є одночасно горизонтальною координатою власної системи відліку хвилі. В цій системі відліку поле швидкості стаціонарне, і траєкторії частинок співпадають з лініями струму, кожна з яких характеризується сталим значенням функції струму $\psi(\theta,\, y)$ (див. розділ 2.1.4). При цьому лінії струму визначаються з рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \Phi_\theta(\theta,\, y) - c, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \Phi_y(\theta,\, y). \tag{81}$$

Горизонтальні $\mathfrak{a}_x$ й вертикальні $\mathfrak{a}_y$ прискорення частинок рідини у власній системі відліку хвилі визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_x &= \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \Phi_{\theta\theta}(\Phi_\theta - c) + \Phi_{y\theta}\Phi_y, \\ \mathfrak{a}_y &= \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \Phi_{y\theta}(\Phi_\theta - c) - \Phi_{\theta\theta}\Phi_y. \end{aligned} \tag{82}$$

Потенціал швидкості у власній системі відліку хвилі позначатимемо як $\phi(\theta,\, y)$, причому зв'язок з потенціалом $\Phi(\theta,\, y)$ у лабораторній системі відліку виражається співвідношенням $\phi(\theta,\, y) = \Phi(\theta,\, y) - c\theta$. Потенціал швидкості $\phi(\theta,\, y)$ і функція струму $\psi(\theta,\, y)$ задовольняють умовам Коші-Рімана (21). Тому у власній системі відліку хвилі можна ввести комплексний потенціал $w(\zeta) = \phi + \mathrm{i}\psi$, що є аналітичною функцією комплексного аргументу $\zeta = \theta + \mathrm{i}y$. Як було визначено в розділі 2.1.4, площину ζ називатимемо *фізичною*, а площину w — *оберненою*.

Квадрат швидкості у власній системі відліку хвилі виражається через комплексний потенціал таким чином:

$$\left(c-\Phi_\theta\right)^2+\Phi_y^2=\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right|^2, \tag{83}$$

оскільки

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}=\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\mathrm{i}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=\phi_\theta-\mathrm{i}\phi_y \;\Rightarrow \tag{84}$$

$$\phi_\theta=\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right),\;\; \phi_y=-\,\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right).$$

Величина $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}$ називається *комплексною швидкістю* [17, с. 40]. В комплексних змінних рівняння (81) для ліній струму мають вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right)^*. \tag{85}$$

У лабораторній системі відліку визначимо функцію струму $\Psi(\theta, y)$ так, щоб залишалися справедливими умови Коші-Рімана

$$\Phi_\theta=\Psi_y, \quad \Phi_y=-\Psi_\theta. \tag{86}$$

Для цього $\Psi(\theta, y)=\psi(\theta, y)+cy$. Функція $W=\Phi+\mathrm{i}\Psi=w+c\zeta$ є комплексним потенціалом у лабораторній системі відліку. Тоді

$$\begin{aligned}\Phi&=\frac{1}{2}\left(W+W^*\right)\equiv-\mathrm{i}c\left(R-R^*\right),\\ \Psi&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(W-W^*\right)\equiv\quad\; c\left(R+R^*\right),\end{aligned} \tag{87}$$

де для зручності введено комплексну функцію $R=\frac{\mathrm{i}W^*}{2c}$, причому для виконання умов Коші-Рімана (86) необхідно, щоб

$$R_\theta=\mathrm{i}R_y \quad\Leftrightarrow\quad R(\theta, y)=R(y+\mathrm{i}\theta). \tag{88}$$

Будь-яка комплексна функція R, для якої виконується умова (88), тотожно задовольняє рівняння Лапласа $\Delta R=0$. При цьому, враховуючи співвідношення (87), рівняння Лапласа для потенціалу швидкості $\Delta\Phi=0$ й функції струму

$$\Delta\Psi=0 \tag{89}$$

також задовольняються тотожно.

Враховуючи співвідношення (87) і (88), кінематична гранична умова (76) набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(R(\theta,\ \eta)+R^{*}(\theta,\ \eta)-\eta\Big)=0$$

або

$$\Psi(\theta,\ \eta)-c\eta=\mathrm{const}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\theta,\ \eta)=0. \tag{90}$$

Останнє рівняння означає, що *вільна поверхня* $y=\eta(\theta)$ *є лінією струму* (див. розділ 2.1.4). Оскільки функція струму визначена з точністю до довільної сталої, як це випливає з умов Коші-Рімана (86), то і стала інтегрування const у рівнянні (90) взагалі є також довільною. Проте цю довільну сталу прийнято обирати так, щоб на вільній поверхні функція струму $\psi=0$ $\big($див., наприклад, Коуклет [62]$\big)$, звідки $\mathrm{const}=0$. При цьому, зафіксувавши const, ми тим самим однозначно визначаємо функцію струму.

З граничної умови (77) на дні аналогічно до кінематичної граничної умови випливає, що дно, як і вільна поверхня, є лінією струму, тобто $\psi(\theta,\ -h)=\mathfrak{const}$. Оскільки на вільній поверхні обрано $\psi=0$, то з формули (20) одержуємо, що $\mathfrak{const}=-Q$, де

$$Q=\int\limits_{1}^{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}l=\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)}\big(\Phi_x-c\big)\,\mathrm{d}y \tag{91}$$

у власній системі відліку хвилі є потоком маси через криву, що з'єднує дно і вільну поверхню. При цьому потік не залежить ані від форми кривої ($\boldsymbol{n}$ — її вектор нормалі, $\mathrm{d}l$ — елемент довжини), ані від положення початку "1" кривої на дні та кінця "2" на вільній поверхні (див. розділ 2.1.4). Якщо в усій області, зайнятій рідиною, $\Phi_x<c$ (див. розділ 2.3.4), то $Q<0$, і $\psi|_{y=-h}>0$, тобто за умови, що хвиля рухається швидше за частинки рідини, значення функції струму у власній системі відліку хвилі монотонно зростає від нуля на вільній поверхні до значення $|Q|$ на дні.

2.3.2. Інтегральні співвідношення між параметрами хвилі. Енергія хвилі (віднесена на одиничну горизонтальну площу, див. розділ 2.1.7) в безрозмірних змінних виражається як

$$E = K + U =$$
$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{\eta(\theta)} \left(\Phi_\theta^2 + \Phi_y^2\right)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}y + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left(\eta^2(\theta) - \overline{\eta}^2\right)\mathrm{d}\theta. \quad (92)$$

Відповідно імпульс хвилі (віднесений на одиничну горизонтальну площу) в безрозмірних змінних визначається співвідношенням

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{\eta(\theta)} \Phi_x\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}y. \quad (93)$$

Надалі, коли будемо говорити про енергію й імпульс хвилі, слова “віднесений на одиничну горизонтальну площу” опускатимемо.

Потік маси Q і значення функції струму на дні виражаються через імпульс хвилі I. Враховуючи умови Коші-Рімана (86), з формули (93) одержуємо

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-h}^{\eta(\theta)} \Psi_y(\theta, y)\, \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\theta = \overline{\Psi}\,|_{y=\eta(\theta)} - \overline{\Psi}\,|_{y=-h} =$$
$$c\overline{\eta} - \left(\psi\,|_{y=-h} - ch\right).$$

Отже,

$$\Psi(\theta,\, -h) = c\overline{\eta} - I \quad \Leftrightarrow \quad \psi(\theta,\, -h) = -Q = c(\overline{\eta} + h) - I. \quad (94)$$

Величина $Q_0 = c(\overline{\eta} + h)$ за абсолютною величиною є потоком маси, що виникає у власній системі відліку внаслідок її руху відносно нерухомої лабораторної системи відліку (у власній системі відліку спостерігачу здається, що рідина рухається справа наліво зі швидкістю c). Повний же потік маси Q відрізняється від “нульового” потоку Q_0 на величину I. Отже, імпульс хвилі I є одночасно потоком маси, що породжується хвилею в напрямі її розповсюдження. Цей потік часто називають *дрейфовим* [20, с. 139], оскільки він викликаний дрейфом частинок рідини в напрямі розповсюдження хвиль скінченної амплітуди (в противагу до хвиль нескінченно малої амплітуди, де дрейфу немає), або *приповерхневим*, оскільки дрейфова швидкість частинок рідини швидко спадає з глибиною [16, с. 524]. На честь Стокса, хто першим встановив ці властивості хвиль скінченної амплітуди $\big($Стокс [157], 1847 р., див. розділ 2.3.4$\big)$, цей потік також називають *стоксовим* [33, с. 614].

Оскільки

$$-Q = c(\overline{\eta}+h) - I = c\left(\overline{\eta}+h-\frac{I}{c}\right) \equiv cd, \qquad (95)$$

то величина d є глибиною однорідного потоку, що рухається у власній системі відліку хвилі зі швидкістю c справа наліво, потік маси якого дорівнює потоку маси хвилі Q. Глибина d називається *незбуреною глибиною*[4] [62, с. 187] і визначає значення функції струму на дні:

$$\frac{\psi|_{y=-h}}{c} = d. \qquad (96)$$

При цьому глибина h, визначена відносно середнього рівня хвилі ($\overline{\eta}=0$), більша за незбурену глибину d на величину

$$h-d = \frac{I}{c} > 0. \qquad (97)$$

Кінетична енергія хвилі K виражається через імпульс хвилі I (або стоксовий потік) таким чином:

$$K = \frac{cI}{2}. \qquad (98)$$

Це співвідношення вперше встановив Леві-Чивіта $\big($1924 р., див. [96, с. 159]$\big)$. Відтворимо доведення, наведене в роботі Лонге-Хіггінса [96] (1975 р.). Розглянемо

[4]undisturbed depth (англ.)

$$K = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)}\left(\Phi_\theta^2+\Phi_y^2\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{2\lambda}\Biggl(\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)}\left(\left(\Phi_\theta-c\right)^2+\Phi_y^2\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y +$$

$$\underbrace{2c\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)}\Phi_\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y}_{2c\lambda I} - \underbrace{c^2\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y}_{c^2\lambda(\overline{\eta}+h)}\Biggr),$$

де в безрозмірних змінних $\lambda = 2\pi$. Враховуючи, що якобіан переходу від фізичної площини до оберненої виражається як

$$\left|\frac{\partial(\phi,\,\psi)}{\partial(\theta,\,y)}\right| = \begin{vmatrix}\phi_\theta & \psi_\theta\\ \phi_y & \psi_y\end{vmatrix} = \left(\Phi_\theta-c\right)^2+\Phi_y^2\,,$$

одержуємо

$$\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_{-h}^{\eta(\theta)}\left(\left(\Phi_\theta-c\right)^2+\Phi_y^2\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{-c\lambda}\int\limits_{cd}^{0}\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi = c^2\lambda\,d,$$

де межі інтегрування в оберненій площині стають зрозумілими з рис. 7 на с. 160. Тоді, враховуючи співвідношення (95), приходимо до потрібного результату (98).

2.3.3. Розв'язок рівняння Лапласа в фізичній і оберненій площинах. Загальний розв'язок рівняння Лапласа (74), що задовольняє граничну умову на дні (77), задається розкладом (40), що в безрозмірних змінних має такий вигляд:

$$\Phi(\theta,\,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+C_n^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)\left(T_n\,\mathrm{e}^{ny}+T_{-n}\,\mathrm{e}^{-ny}\right), \qquad (99)$$

$$T_n = \frac{\mathrm{e}^{nh}}{\mathrm{e}^{nh}+\mathrm{e}^{-nh}} = \frac{1}{2}\bigl(1+\mathrm{th}(nh)\bigr). \qquad (100)$$

Враховуючи умови Коші-Рімана (86), функція струму має вигляд

$$\Psi(\theta,\, y) = (c\overline{\eta} - I) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\mathrm{i} C_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - \mathrm{i} C_n^{*} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \Big) \Big(T_n \,\mathrm{e}^{ny} - T_{-n} \,\mathrm{e}^{-ny} \Big), \quad (101)$$

де стала інтегрування знаходиться за відомим значенням (94) функції струму на дні, зважаючи на те, що $(T_n \,\mathrm{e}^{-nh} - T_{-n} \,\mathrm{e}^{nh}) = 0$ для будь-яких n. Тоді комплексний потенціал $W = \Phi + \mathrm{i}\Psi$ у *фізичній площині* задається таким розкладом (що є *рядом Фур'є* періодичної функції комплексного змінного ζ з періодом $\lambda = 2\pi$):

$$\frac{W(\zeta)}{c} = 2\mathrm{i}\xi_0 + 2\mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\xi_n^{*} \, T_n \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\zeta} - \xi_n \, T_{-n} \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\zeta} \Big), \qquad \xi_0 = \frac{1}{2} \Big(\overline{\eta} - \frac{I}{c} \Big), \quad (102)$$

де $\xi_n = \dfrac{\mathrm{i}C_n}{c}$. Для симетричних хвиль коефіцієнти ξ_n мають бути дійсними внаслідок умови (41). Комплексний потенціал у власній системі відліку хвилі задається як

$$\frac{w(\zeta)}{c} = -\zeta + B_0 + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(B_n^{*} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\zeta} - \mathrm{e}^{-2nh} B_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\zeta} \Big), \quad (103)$$

де введено позначення $B_0 = 2\mathrm{i}\xi_0$, $B_n = 2\xi_n T_n$.

В *оберненій площині* комплексний потенціал є незалежною змінною, і розв'язок задається оберненою функцією $\zeta(w)$. При цьому періоду $\lambda = 2\pi$ у фізичній площині відповідає період $c\lambda$ в оберненій площині (див. рис. 7 на с. 160). Розклад функції $\zeta(w)$ є оберненим до розкладу (103) і має такий вигляд [62, с. 187]:

$$\zeta(w) = -\frac{w}{c} + \mathrm{i}a_0 + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nw/c} - \mathrm{e}^{-2nd} a_n^{*} \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nw/c} \Big), \qquad a_0 = \Big(\overline{\eta} - \frac{I}{c} \Big), \quad (104)$$

де незбурена глибина d виникає внаслідок умови на дні (96). При розв'язку задачі в оберненій площині нульовий рівень $y = 0$ часто обирають на рівні незбуреної глибини для того, щоб $\overline{\eta} = I/c$, і вільний член $a_0 = 0$. Для симетричних хвиль коефіцієнти a_n мають бути дійсними.

Недоліком розкладів у фізичній площині є те, що вільна поверхня — невідома функція, і для неї потрібно задавати додаткову апроксимацію, тоді як в оберненій площині вільна поверхня визначена *a priori*.

Розклади (103) і (104) представляють *точний* розв'язок канонічної задачі у вигляді ряду Фур'є. При безпосередніх же розрахунках розглядають *обрізані* ряди, що містять скінченне число членів — *наближені* розв'язки. Коефіцієнти цих розкладів знаходяться з граничних умов на вільній поверхні. При цьому в загальному випадку можливі два варіанти. Перший — у відповідних рівняннях прирівняти коефіцієнти при однакових степенях лінійно-незалежних функцій, за якими проводиться розклад (у розглянутих рядах — це експоненти $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nf}$), і одержати нелінійну алгебраїчну систему рівнянь для невідомих змінних — *прямий метод*. Другий — обрати певне розбиття вільної поверхні — точки колокацій, — кількість яких визначається кількістю невідомих, і задовольнити в цих точках граничні умови точно, що накладе необхідні рівняння на невідомі коефіцієнти — *метод колокацій*.

Розклади (103) і (104) представляють два різні підходи до розв'язку канонічної задачі гідродинаміки. Обидва вони були започатковані Стоксом відповідно в 1847 р. у праці [157] (перший метод Стокса — фізична площина) і 1880 р. у праці [158] (другий метод Стокса — обернена площина). Розглянемо дослідження Стокса.

2.3.4. Стоксові хвилі. Розв'язком рівнянь канонічної моделі (74)–(77) при $A \to 0$ є лінійна хвиля з $\eta \to 0$ — хвиля нескінченно малої амплітуди (відносно довжини хвилі λ). Для лінійної хвилі в безрозмірних змінних фазова швидкість $c = \operatorname{th} h$ (у випадку глибокої води $c = 1$). Форма вільної поверхні лінійної хвилі є косинусоїда, швидкість частинок рідини нескінченно мала порівняно з фазовою швидкістю хвилі: $\frac{\Phi_\theta}{c} \to 0$, $\frac{\Phi_y}{c} \to 0$.

Для хвиль скінченної амплітуди ($A \not\to 0$) необхідно враховувати нелінійність граничних умов. Якщо $A \ll 1$ (такі хвилі називаються хвилями *малої амплітуди*), то можна розвивати теорію збурень за малим параметром A. Так, наприклад, у розкладі (104) необхідно вважати $a_n \sim a_1^n$. Для гравітаційних хвиль теорію збурень вперше побудував Стокс: у 1847 р. — для глибокої води [157], використовуючи розклади в фізичній площині, а в 1880 р. — для скінченної глибини [158], побудувавши розклади в оберненій площині, де вони мають значно простіший вигляд.

Стокс вперше встановив такі властивості хвиль скінченної амплітуди.

1. Дисперсія нелінійної хвилі залежить від її амплітуди, а саме для випадку глибокої води [16, с. 524]

$$c^2 = 1 + a^2 + \frac{5}{4}\,a^4 + \ldots, \tag{105}$$

де a — амплітуда першої гармоніки профілю хвилі

$$\eta = a\cos\theta + \left(\frac{1}{2} + \frac{17}{24}\,a^2\right)a^2\cos 2\theta + \frac{3}{8}\,a^3\cos 3\theta + \frac{1}{3}\,a^4\cos 4\theta + \ldots \tag{106}$$

Для скінченної глибини нелінійний закон дисперсії має значно громіздкіший вигляд (див. [35, с. 456]).

2. Хвилі скінченної амплітуди спричиняють перенос маси в напрямі розповсюдження хвилі (траєкторії частинок не є замкненими лініями), тобто імпульс хвилі $I \neq 0$.

3. З ростом амплітуди a гребені хвилі загострюються (хоча і залишаються округлими), а впадини сплощуються.

Завдяки цим досягненням Стокса однопараметричне сімейство розв'язків за амплітудою a (або за параметром A) канонічної моделі, що наближено описується розкладами (105) і (106) (або подібними розкладами у випадку скінченної глибини), одержало назву хвиль Стокса або *стоксових хвиль* $\big($див. Уізем [35, с. 453]$\big)$.

З формули (106) видно, що хвилі Стокса симетричні як відносно гребеня ($\theta = 0$), так і відносно впадини ($\theta = \pi$). Для хвиль малої амплітуди це довів Леві-Чивіта [91] (1925 р.), використовуючи метод конформних відображень. Пізніше Гарабедян [79] (1965 р.), використовуючи варіаційні методи і симетризацію, показав, що в рамках канонічної моделі взагалі не існують несиметричні хвилі з однаковими гребенями і однаковими впадинами.

Стокс розрахував випадок глибокої води з точністю до $O(A^5)$ і одержав результати для скінченної глибини з точністю до $O(A^3)$. Результати Стокса підтвердив Релей в праці [141] (1876 р.) і ряді подальших робіт. Знайти ж наступні доданки одержаних Стоксом амплітудних розкладів виявилося складним технічним завданням. Лише в 1914 р. Уілтон [175] одержав розклади для глибокої води з точністю до $O(A^{10})$ (проте з помилками вже у восьмому порядку), а Де [68] (1955 р.) опублікував результати для довільної глибини з точністю до $O(A^5)$, що фактично стало межею розрахунків вручну. Лише використання комп'ютерної арифметики дозволило Шварцу [151] (1974 р.) побудувати стоксові розклади (в оберненій площині) для довільної глибини з безпрецедентною для того часу точністю $O(A^{48})$, що дало можливість дослідити властивості прогресивних хвиль без обмеження на малість їх амплітуди (див. розділ 2.3.9).

Зауважимо, що амплітудні розклади Стокса незастосовні для хвиль на *мілкій воді*, коли величина h/λ мала. Причина цьому — те, що на мілкій воді навіть хвилі малої амплітуди мають кноїдальну, а не косинусоїдальну форму. Це вперше встановили Кортевег і Де Вріз [88] (1895 р.), показавши, що в першому наближенні профіль хвилі задається функцією [35, с. 452]

$$\eta(\theta) - \eta(\pi) = H\,\mathrm{cn}^2\Big(\frac{\mathscr{K}(\kappa)}{\pi}\,\theta\,\Big|\,\kappa\Big) + O(H^2), \qquad (107)$$

де $H = \eta(0) - \eta(\pi)$, cn — еліптичний косинус,

$$\mathscr{K}(\kappa) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \kappa^2 \sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\theta$$

є повним еліптичним інтегралом першого роду, його модуль κ знаходиться з трансцендентного рівняння

$$\frac{\kappa\mathscr{K}(\kappa)}{\pi} = \left(\frac{3H}{4h_0^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_0 = h + \eta(\pi).$$

Завдяки формі свого профілю хвилі на мілкій воді було названо *кноїдальними*. В обраних безрозмірних змінних фазова швидкість таких хвиль у лінійному наближенні має вигляд $c = \sqrt{h}$. Теорію кноїдальних хвиль вищого порядку розробили Лайтоун [89] (1960 р.) і Чеппелір [56] (1962 р.) — відповідно для другого і третього порядків. Нарешті, Фентон [74] (1979 р.) застосував аналітичні комп'ютерні розрахунки для одержання розв'язків дев'ятого порядку за параметром H/h. Хоча кноїдальні хвилі на мілкій воді своєю формою суттєво відрізняються від стоксових хвиль на глибокій воді, що наближено описуються амплітудним розкладом (106), ці хвилі з фізичної точки зору описують один і той же об'єкт, тому надалі кноїдальні хвилі включатимемо в термін "стоксові хвилі".

2.3.5. Квадратична нелінійність рівняння Бернуллі. З рівняння Бернуллі (75) для швидкості поверхневих частинок рідини у власній системі відліку хвилі маємо

$$\left(\Phi_\theta - c\right)^2 = 2\left(B-\eta\right) - \Phi_y^2 \;\Leftrightarrow\; \Phi_\theta - c = \mp\sqrt{2\left(B-\eta\right) - \Phi_y^2}\,. \quad (108)$$

Видно, що внаслідок своєї квадратичності рівняння Бернуллі в загальному випадку допускає як від'ємні, так і додатні значення швидкості частинок на поверхні рідини у власній системі відліку хвилі.[5] Зокрема, швидкість частинки на гребені хвилі дорівнює

$$q(0) \equiv \left(\Phi_\theta\,|_{y=\eta(0)} - c\right) = \mp\sqrt{2\left(B-\eta(0)\right)}\,, \quad (109)$$

оскільки $\Phi_y\,|_{y=\eta(0)} = 0$. Розглянемо можливі варіанти.

1. $\left(\Phi_\theta\,|_{y=\eta(\theta)} - c\right) < 0$ *для всіх* θ. Такі розв'язки включають лінійні хвилі, для яких $(\Phi_\theta - c) \to -c < 0$, отже, саме вони мають відповідати сімейству стоксових хвиль. Якщо умова $(\Phi_\theta - c) < 0$ виконується на вільній поверхні, то вона виконується й у всій області, що зайнята рідиною. Дійсно, з вигляду частинних розв'язків (39) рівняння Лапласа випливає, що горизонтальна швидкість Φ_θ при $\theta = \text{const}$ спадає з ростом вертикальної відстані від вільної поверхні, тобто $\Phi_\theta\,|_{y<\eta(\theta)} < \Phi_\theta\,|_{y=\eta(\theta)}$ при фіксованому θ. Таким чином, для стоксових хвиль

$$\Phi_\theta - c < 0, \quad -h \leqslant y \leqslant \eta(\theta), \quad (110)$$

тобто *хвиля рухається швидше за частинки рідини в усій області, зайнятій рідиною*. Умову (110) називатимемо умовою *регулярності* потоку рідини, а відповідні хвилі — *регулярними*. Надалі під *стоксовими хвилями* розумітимемо саме такі хвилі, для яких справджується умова (110), і які на одному періоді мають лише один гребінь і одну впадину[6]. Схематичний вигляд стоксової хвилі на одному періоді зображено на рис. 4, при цьому зв'язок між знаками кута нахилу профілю вільної поверхні η_θ до

[5] На можливість додатних швидкостей в рівнянні Бернуллі (знак "+") вперше звернули увагу Лукомський та ін. [121] (2002 р.).

[6] Існують також розв'язки канонічної моделі, що мають гребені різної висоти, — субгармонічні хвилі, див. розділ 2.3.12.

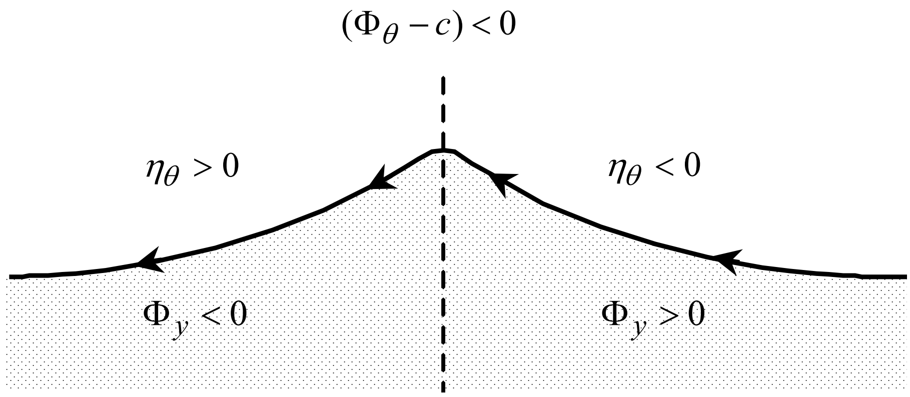


Рис. 4. Стоксова хвиля.

горизонтальної вісі та вертикальної складової швидкості поверхневих частинок Φ_y визначається кінематичною граничною умовою $\left(\Phi_\theta - c\right)\eta_\theta = \Phi_y$.

З формули (109) видно, що для стоксових хвиль швидкість частинки рідини на гребені хвилі зростає від значення $q(0) = -c$ для хвиль нескінченно малої амплітуди до граничного значення $q(0) = 0$. Хвиля з $q(0) = 0$, яку називатимемо *граничною*, вже не належить до сімейства стоксових хвиль у розумінні означення (110). Умова $(\Phi_\theta - c) < 0$ справедлива в усій області, зайнятій рідиною, за виключенням єдиної точки на гребені хвилі, де $(\Phi_\theta - c) \equiv q(0) = 0$. Це є особлива (сингулярна) точка, де потік нерухомий у власній системі відліку хвилі, — *точка застою*. Подібні точки, де швидкість потоку обертається в нуль, називаються також *критичними* [17, с. 38]. З кінематичної граничної умови (76) видно, що в точці поверхні, де $(\Phi_\theta - c) = 0$ і $\Phi_y = 0$, похідна η_θ невизначена, тобто має розрив, хоча сам профіль $y = \eta(\theta)$ неперервний. Отже, якщо на гребені $q(0) = 0$, то поверхня хвилі в точці $\theta = 0$ утворює кут, де похідна η_θ має розрив. Такі хвилі називатимемо *гостро-гребеневими*.

2. $\left(\Phi_\theta - c\right)|_{y=\eta(\theta)} > 0$ *для всіх* θ.

3. *Знакозмінний випадок*. Перехід від гілки $\Phi_\theta - c < 0$ до гілки $\Phi_\theta - c > 0$ може відбутися лише в точці $\theta = \theta_c$, де $(\Phi_\theta - c) = 0$.

При цьому можливі два варіанти: (i) $\Phi_y|_{\theta=\theta_c} = 0$, тоді абсолютне значення швидкості частинки $q(\theta_c) = 0$, у власній системі відліку хвилі, і $\theta = \theta_c$ є критичною (особливою) точкою; (ii) $\Phi_y|_{\theta=\theta_c} \neq 0$, тоді $\theta = \theta_c$ є точкою розгалудження профілю хвилі, а сам профіль в околі цієї точки не є однозначною функцією.

Незважаючи на теоретичну можливість існування хвиль, де швидкості частинок перевищують фазову швидкість хвилі, на даний момент однопараметричне сімейство стоксових хвиль при кожному фіксованому h є єдиним достеменно встановленим розв'язком канонічної моделі з однаковими гребенями і впадинами. З іншого боку, при врахуванні поверхневого натягу (див. розділи 2.2.6 і 2.3.14) існує одночасно кілька різних сімейств гравітаційно-капілярних хвиль, профілі яких при достатньо великих амплітудах не є однозначними кривими $\big($див., наприклад, Дубіан і Харіф [66]$\big)$, тобто швидкості частинок на певних ділянках вільної поверхні перевищують фазову швидкість хвилі. Для випадку ж чисто гравітаційних хвиль Спілвогель [155] (1970 р.) строго довів, що за умови аналітичності потоку в усій області, зайнятій рідиною, профіль хвилі (лінія струму $\psi = 0$) є однозначною функцією і не може мати вертикальні дотичні в жодній точці.

Таким чином, якщо і можуть існувати гравітаційні хвилі з $(\Phi_\theta - c) > 0$, то для цього вони мають мати на вільній поверхні критичні точки, де профіль хвилі утворює кут. Приклад такої конфігурації зображено на рис. 5, при цьому швидкість поверхневих частинок поблизу точки $\theta = 0$ вища за фазову швидкість хвилі. Видно, що наведена хвиля не може мати сталу форму, оскільки частинки рідини перетікатимуть від лівого гребеня до правого, де відбуватиметься їх накопичення. Це призведе до перекиду, а значить і руйнування, хвилі. Отже, не може існувати прогресивних хвиль сталої форми з $q(0) > 0$, а умова того, що горизонталь-

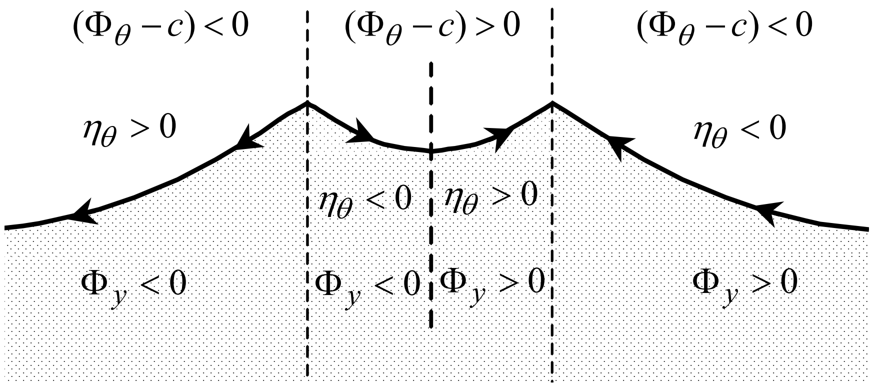


Рис. 5. Конфігурація вільної поверхні, де поверхневі частинки поблизу центральної вісі симетрії рухаються швидше за саму хвилю. Видно, що в такому випадку хвиля не зберігатиме сталу форму.

ні швидкості частинок рідини на гребенях перевищують швидкість самих гребенів, є традиційним *критерієм руйнування хвиль* [43, с. 386].

Якому ж розв'язку тоді відповідає знак "$+$" у формулі (109)? Єдиним можливим варіантом є такий, що для кожного представника сімейства розв'язків зі знаком "$+$" справджуватиметься умова $B - \eta(0) = 0$, тобто $q(0) = 0$. Таким чином, з рівняння Бернуллі випливає, що окрім відомого сімейства стоксових хвиль, знак "$-$" у формулі (109), може існувати друге сімейство розв'язків, знак "$+$" у формулі (109), причому кожний представник цього сімейства має мати особливу (критичну) точку на гребені, тоді як для сімейства стоксових хвиль таку властивість має лише гранична хвиля. Це припущення вперше висунули Лукомський і Ганджа [122] (2003 р.) з аналізу одержаного ними раніше (Лукомський та ін. [121], 2002 р.) другого сімейства розв'язків канонічної моделі, названих "*нерегулярними*" хвилями. Нерегулярні хвилі розглянемо в розділі 2.3.13, а зараз перейдемо до аналізу сімейства стоксових хвиль.

2.3.6. Гранична хвиля Стокса. Граничну хвилю $q(0)=0$ сімейства хвиль з $q(0)<0$ вперше дослідив Стокс у своїй третій історичній роботі з теорії хвиль на воді [159]. Стокс показав, що якщо на гребені хвилі потік нерухомий відносно самої хвилі, то гребінь хвилі утворює гострий 120° кут. Відтворимо в деталях доведення цього твердження.

З рівняння (109) випливає, що для хвилі з $q(0)=0$ висота гребеня над середнім рівнем хвилі

$$\eta(0)=B=\frac{c^2}{2}+\frac{1}{2}\,\overline{\Phi_x^2}\,|_{y=-h}. \tag{111}$$

Оберемо початок власної системи відліку хвилі на її гребені, тобто перемістимо рівень $y=0$ на величину $\eta(0)$ вгору. В цій системі відліку рівняння Бернуллі (75), записане в термінах комплексного потенціалу, враховуючи співвідношення (83), має вигляд

$$\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\right|^2+2\,\mathrm{Im}\,\zeta=0,\quad \zeta\in\mathit{\Gamma}, \tag{112}$$

де $\zeta=\theta+\mathrm{i}\big(y-\eta(0)\big)\equiv r\exp(\mathrm{i}\varphi)$, $\mathit{\Gamma}$ — рівняння поверхні.

Розглянемо комплексний потенціал потоку, що описується степеневою функцією

$$w(\zeta)=\phi+\mathrm{i}\psi=\mathcal{A}\,\zeta^n=|\mathcal{A}|\,r^n\exp(\mathrm{i}n\varphi+\mathrm{i}\varphi_{\mathcal{A}}). \tag{113}$$

В оберненій площині w вільна поверхня $\psi=0$ горизонтальна, а рідина займає верхню півплощину $\psi\geqslant 0$, де $0\leqslant\arg(w)\leqslant\pi$. Якщо $n>1$, то відображення (113) кожній точці півплощини $0\leqslant\arg(w)\leqslant\pi$ однозначно ставить у відповідність точку з кутового сектора $0\leqslant\chi\leqslant\frac{\pi}{n}$, $\chi=\varphi+\frac{\varphi_{\mathcal{A}}}{n}$, фізичної площини ζ. Отже, комплексний потенціал (113) описує *потік навколо кута* $\frac{\pi}{n}$. Нижній же півплощині $\psi<0$ з $\pi<\arg(w)<2\pi$ відповідає сектор $\frac{\pi}{n}<\chi<\frac{2\pi}{n}$. Таким чином, два сектори фізичної площини $0\leqslant\chi<\frac{2\pi}{n}$ однозначно відображаються на всю комплексну площину w з $0\leqslant\arg(w)<2\pi$. Обернене ж відображення $\zeta\sim w^{\frac{1}{n}}$ не є взаємнооднозначним, оскільки кожній точці $0 \leqslant \arg(w) < 2\pi$ комплексної площини відповідає одразу набір різних точок площини ζ — по одній з кожного сектора $\frac{2\pi}{n} k \leqslant \chi < \frac{2\pi}{n}(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. Якщо n — ціле, то кількість таких секторів дорівнює n (тоді $k = \overline{0, n-1}$). Якщо $n = \frac{p}{q}$ — раціональне (p і q — цілі), то кількість секторів дорівнює p, а площина ζ є рімановою поверхнею з q листами. Якщо ж n — ірраціональне, то кількість секторів нескінченна, а площина ζ є нескінченнолистною рімановою поверхнею (див. детальніше курс теорії функцій комплексного змінного [29, с. 90–103, 154]). При цьому особлива (сингулярна) точка $\zeta = 0$, де порушується аналітичність відображення $w = \zeta^n$ (неперервність похідних), називається *точкою розгалудження* порядку n, оскільки вона належить одночасно всім секторам. Розріз же площини ζ (лінія склеювання різних листів ріманової поверхні) визначається виразом $\chi = \frac{2\pi}{n}[n]$, де квадратні дужки означають цілу частину. Знайдемо, чому дорівнює показник n для нашої задачі.

Комплексна швидкість, відповідна комплексному потенціалу (113), має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} = \phi_\theta - \mathrm{i}\phi_y = n\mathcal{A}\,\zeta^{n-1} = n|\mathcal{A}|\,r^{n-1}\exp\bigl(\mathrm{i}(n-1)\varphi + \mathrm{i}\varphi_{\mathcal{A}}\bigr). \quad (114)$$

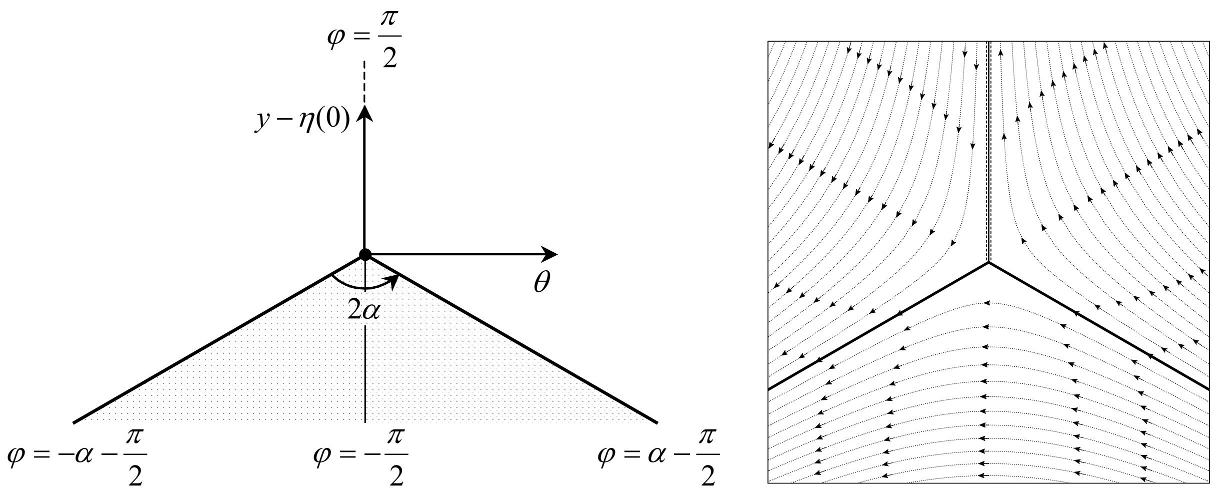
Підставляючи даний вираз у рівняння Бернуллі (112), одержимо

$$n^2|\mathcal{A}|^2 r^{2n-2} + 2r\sin\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathit{\Gamma}. \quad (115)$$

Дане співвідношення має справджуватись для будь-яких $r > 0$, звідки

$$2n - 2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{3}{2}.$$

Нехай гребінь хвилі утворює кут 2α, а ребра цього кута задаються рівняннями $\varphi = \pm\alpha - \frac{\pi}{2}$ (див. рис. 6а). З умови того, що поверхня є лінією струму $\psi = 0$, і враховуючи співвідношення (113), одержимо



а) б)

Рис. 6. Локальний 120° кутовий потік
(розріз комплексної площини заштрихований).

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{3}{2}\left(+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_{\mathcal{A}}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\left(+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_{\mathcal{A}}=\pi m,\\ &\sin\left(\frac{3}{2}\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_{\mathcal{A}}\right)=0 \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_{\mathcal{A}}=\pi l, \end{aligned} \tag{116}$$

де $m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Віднімаючи ці два рівняння, одержимо

$$\alpha = \frac{\pi}{3},$$

причому $m - l = 1$ з умови $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Отже, дійсно, за умови $q(0) = 0$ гребінь хвилі утворює 120° кут. Ребра цього кута задаються рівняннями $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ і $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$. Тоді з умови (115) маємо

$$|\mathcal{A}| = \frac{2}{3}.$$

Фазу $\varphi_{\mathcal{A}}$ знаходимо, додавши рівняння (116) один до одного: $\varphi_{\mathcal{A}} = \frac{\pi}{4} + \pi m$. З умови $\phi_\theta < 0$, враховуючи співвідношення (84) і (114), маємо

$$\cos\left(\frac{1}{2}\varphi+\varphi_{\mathcal{A}}\right)<0 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2}+2\pi\,(2k-m)<\varphi<2\pi+\frac{\pi}{2}+2\pi\,(2k-m),$$

де $k \in \mathbb{Z}$. З усіх проміжків по k обираємо той, до якого належать $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ і $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, звідки $2k - m = -1$, і ціле m має бути обов'язково непарним. Отже, з точністю до 2π

$$\varphi_{\mathcal{A}} = \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}.$$

Таким чином, комплексний потенціал обтікання гострого 120° кута має вигляд

$$w(\zeta) = -\frac{2}{3}\, r^{\frac{3}{2}} \exp\left(\mathtt{i}\frac{3}{2}\varphi + \mathtt{i}\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{2}{3}\,\zeta^{\frac{3}{2}} \exp\left(\mathtt{i}\frac{\pi}{4}\right) = \mathtt{i}\frac{2}{3}(\mathtt{i}\zeta)^{\frac{3}{2}} \quad (117)$$

або

$$\zeta(w) = -\mathtt{i}\left(\frac{3}{2\mathtt{i}}\,w\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (118)$$

Отже, аналітична функція $\zeta(w)$ має сингулярність порядку $\dfrac{2}{3}$. Комплексна швидкість має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} = -(\mathtt{i}\,\zeta)^{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{3}{2\mathtt{i}}\,w\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (119)$$

Відповідні потенціал швидкості й функція струму виражаються як

$$\phi = -\frac{2}{3}\, r^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \psi = -\frac{2}{3}\, r^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3}{2}\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad (120)$$

а компоненти швидкості мають вигляд

$$\phi_\theta = -r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \phi_y = r^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad (121)$$

причому $-\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а лінії $\varphi = -\frac{3\pi}{2}$ і $\varphi = \frac{\pi}{2}$ є розрізами комплексної площини. Відповідний кутовий потік зображений на рис. 6б.

Навівши доведення про гострий 120° кут, подібне до викладеного вище, а також зважаючи на те, що гребені хвиль малої амплітуди загострюються з її ростом, як це випливає з наближених розкладів виду (106), Стокс висунув такі знамениті гіпотези [159].

1. *Однопараметричне сімейство хвиль, що при нескінченно малих амплітудах має косинусоїдальну форму, в граничному випадку прямує до гостро-гребеневої конфігурації з кутом* 120°*, і такий розв'язок існує в межах канонічної задачі.* Для обґрунтування Стокс

[159, с. 227] навів такі міркування: "…залишається невизначеним питання, чи може збурення (вільної поверхні, — І.Г.) насправді досягти такої величини, що утворяться гребені гострої форми, або ж існує границя, для якої профіль все ще залишається гладкою кривою, і за межами якої не може існувати хвиль осциляторного безвихрового типу, що розповсюджуються без зміни форми.

Після детальних міркувань я відчуваю, що такої передуючої границі немає, і ми насправді можемо наблизитись настільки, наскільки забажаємо, до конфігурації, де кривизна нескінченна, а вершина є точкою, в якій обидва ребра, що ми щойно розглянули, утворюють кут 120°." Така хвиля називається *граничною хвилею Стокса* або *хвилею граничної форми* [33, с. 628].

2. *Профіль граничної хвилі між гребенями строго опуклий вниз*, тобто на ньому відсутні точки перегину. Обґрунтування Стокса [159, с. 227] чисто інтуїтивні: "Питання, чи у випадку граничної форми нахил хвилі до горизонту неперервно зростає від впадини до вершини і врешті решт прямує до 30°, або, з іншого боку, точки перегину, що профіль має в загальному випадку, залишаються на скінченній відстані від гребеня навіть при досягненні граничної форми так, що при русі від впадини до гребеня нахил досягає максимуму, після чого він починає спадати перед тим, як досягається вершина, є проблема, яку я не можу з впевненістю вирішити, хоча і мало сумніваюсь, що перша альтернатива вірна."

Наслідком *другої гіпотези Стокса* є те, що *кут* 120° *є вписаним при гребені хвилі граничної форми*, тобто профіль граничної хвилі наближається до кута ззовні.

3. *Гранична хвиля є хвилею максимальної висоти*, тобто в межах канонічної задачі не існує хвиль сталої форми, вищих за граничну хвилю Стокса.

Зауважимо, що *доведення Стокса не залежить від амплітуди-*

ди хвилі, а, отже, *не заперечує можливості існування гострогребеневих хвиль іншої амплітуди, ніж гранична хвиля Стокса*.

Розв'язок Стокса (117) і (118) справедливий лише в *нескінченно близькому околі* гребеня хвилі, це є тільки перший член розкладу навколо кута. Тому одержаний кутовий потік називають *локальним*. Для опису вільної поверхні з віддаленням від кута необхідно враховувати наступні члени розкладу. Другий член розкладу навколо особливої точки на гребені знайшов Грант [80] (1973 р.):

$$\zeta(w) = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{2\mathrm{i}}w\right)^{\frac{2}{3}} + \mathrm{i}\gamma(-\mathrm{i}w)^{2\mu} + \ldots, \tag{122}$$

а подальші доданки у вигляді степеневого ряду по μ розрахував Нормен [135] (1974 р.)[7]. Показник μ задовольняє трансцендентне рівняння

$$\operatorname{tg}\pi\mu = -\frac{2+3\mu}{3\sqrt{3}\mu}. \tag{123}$$

Перший корінь цього рівняння $\mu = 0.73467287\ldots$. Таким чином, розклад навколо особливої точки $q(0) = 0$ не є степеневим (регулярним), а включає *ірраціональні* показники, тобто сингулярність, що утворює точка застою на гребені, має нерегулярний характер. Пізніше Емік і Фраєнкель [40] та Маклеод [129] (1987 р.) на основі аналізу інтегрального рівняння Некрасова (див. розділ 2.3.8) дали строге математичне підтвердження результатів Гранта і Нормена.

Грант [80] (1973 р.) також показав, що для всіх хвиль дограничної форми, коли $q(0) < 0$, особлива точка знаходиться над гребенем хвилі за межами області, зайнятої рідиною. При цьому сингулярність має порядок $\frac{1}{2}$, тобто $w \sim \zeta^2$, і лінії струму в точці застою, що в даному випадку стає *сідловою точкою*, перетинаються під кутом 90°. У хвилі ж граничної форми ця сингулярність має порядок $\frac{2}{3}$, і лінії струму перетинаються під кутом 120°. Тому

[7]У роботах Гранта і Нормена обирається протилежний до нашого напрямок руху хвиль, тому знаки перед комплексним потенціалом протилежні.

Грант [80] зробив *припущення*, що *неперервний підхід до граничної хвилі Стокса можливий лише за умови, якщо сингулярність* 120° *утворюється шляхом об'єднання кількох сингулярностей* 90°. Це скоріш за все і є причиною появи ірраціональних степеней у розкладі (122) навколо кута. Лукомський і Ганджа [122] (2003 р.) надали перше чисельне підтвердження гіпотези Гранта, а строгого ж математичного обґрунтування цього факту досі немає.

2.3.7. Чисельні розрахунки граничної хвилі Стокса. Локальний розв'язок Стокса (118) та розклади Гранта і Нормена (122) задовольняють рівняння Лапласа і Бернуллі (112), але не задовольняють асимптотику на дні, що у випадку глибокої води має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} = -c, \quad \psi = cd. \tag{124}$$

Для того, щоб задовольнити цю умову, необхідно шукати лінійні комбінації розв'язків навколо кута, або ж будувати наближені розклади, що тим чи іншим чином враховують характер сингулярності навколо гребеня. Виявляється, що це простіше зробити, якщо відобразити смугу, яку займає рідина в комплексній площині w, на кільце одиничного радіусу. Це робить відображення

$$w = -\mathrm{i}c\ln u, \quad u = \rho\exp(\mathrm{i}s). \tag{125}$$

При цьому потенціал швидкості й функція струму мають вигляд

$$\phi = cs, \quad \psi = -c\ln\rho. \tag{126}$$

Тоді рідина займатиме кругову область, обмежену колами $\rho = 1$ (поверхня) і $\rho = \rho_0 = \mathrm{e}^{-d}$ (дно). Гребінь хвилі має фазу $s = 0$, а впадина – $s = \pm\pi$ (див. рис. 7). Для нескінченної глибини $\rho_0 = 0$, і дно відображається в єдину точку $u = 0$.

У комплексній площині u особлива точка $\zeta = 0$ ($w = 0$) знаходиться в точці $u = 1$, і локальний розв'язок Стокса (118), (119) має

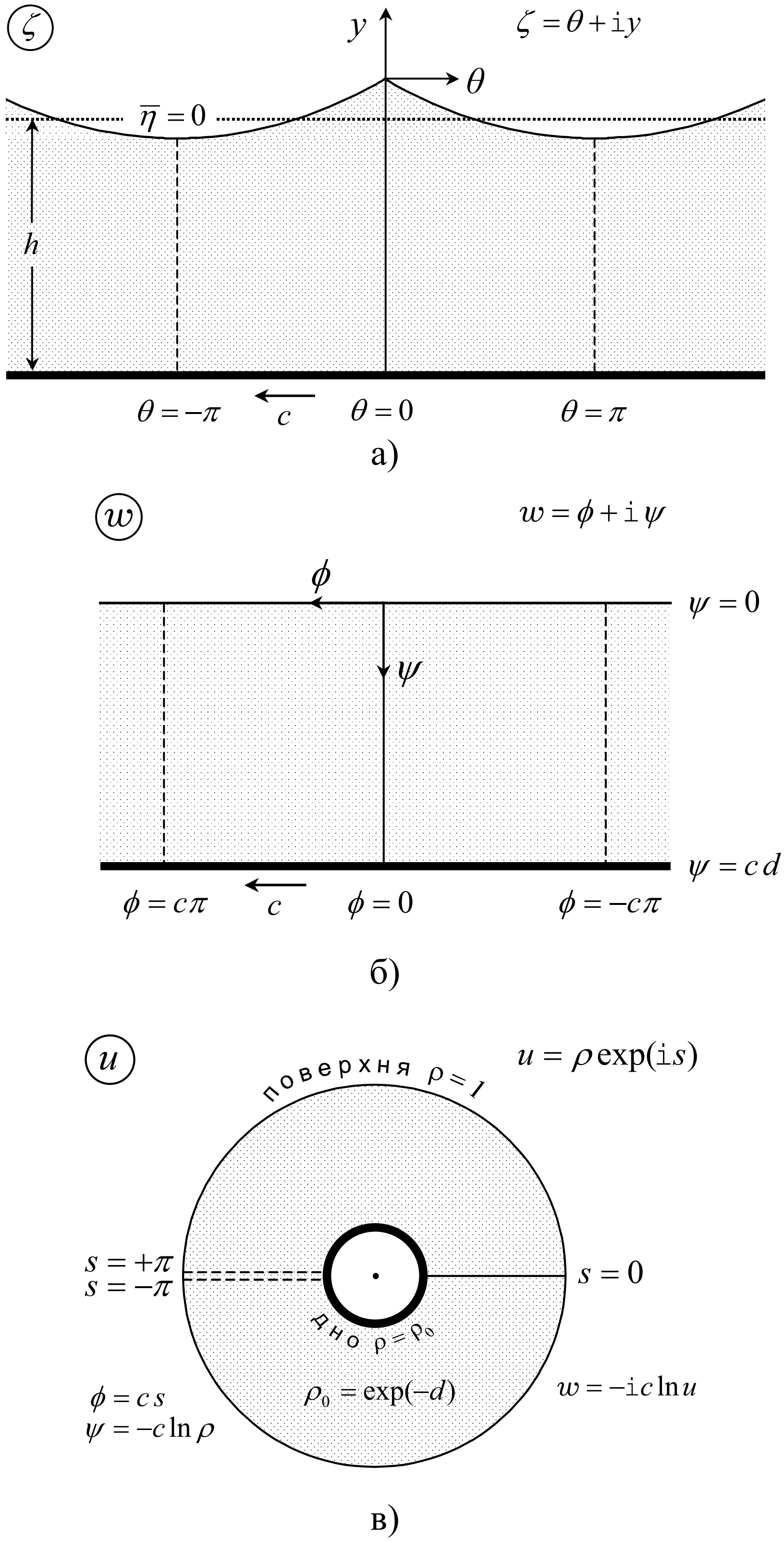


Рис. 7. Пряма і обернені площини:
а) фізична площина; б) обернена площина комплексного потенціалу;
в) обернена площина, відображена на кільце одиничного радіусу.

вигляд

$$\zeta = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}\,c\,(1-u)\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} = -\left(\frac{3}{2}\,c\,(1-u)\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{127}$$

Враховуючи ці асимптотики, Мічелл [134] (1893 р.) у випадку *глибокої води* запропонував для хвилі, що має на гребені особливість порядку $\frac{2}{3}$, таку апроксимацію:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} = -c\,(1-u)^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,u^n. \tag{128}$$

Асимптотика (124) на дні $u = 0$ автоматично задовольняється, якщо покласти $b_0 = 1$. Всі інші невідомі коефіцієнти b_n і швидкість хвилі c знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь після підстановки розкладу (128) в рівняння Бернуллі (112).

Мічелл [134] розрахував перші три коефіцієнти (вважаючи, що $b_n \sim b_1^n$) і одержав $c^2 \approx 1.2$, тобто швидкість хвилі граничної висоти приблизно в 1.09 рази більша за швидкість лінійної хвилі, і $A \approx 0.142$. Пізніше Хевлок [81] (1919 р.) так само розрахував ще один (четвертий) коефіцієнт і одержав $A \approx 0.1418$. Некрасов [21] (1919 р.) підтвердив результати Мічелла, розглянувши обернений розклад[8]

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}w} = -c^{-1}(1-u)^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\,u^n, \quad \alpha_0 = 1. \tag{129}$$

Розрахунок Мічелла вдалося суттєво уточнити лише з появою комп'ютерів. Ямада [176] (1957 р.) врахував перші дванадцять коефіцієнтів розкладу Некрасова (129) і одержав $A \approx 0.1412$ (при цьому Ямада не розв'язував систему рівнянь точно, а знаходив коефіцієнти розкладу методом колокацій вільної поверхні хвилі). Пізніше Ямада і Шиотані [177] (1968 р.) узагальнили метод на випадок скінченної глибини.

[8]Детальніше аналіз робіт Мічелла і Некрасова див. Сретенський [33, с. 630–637].

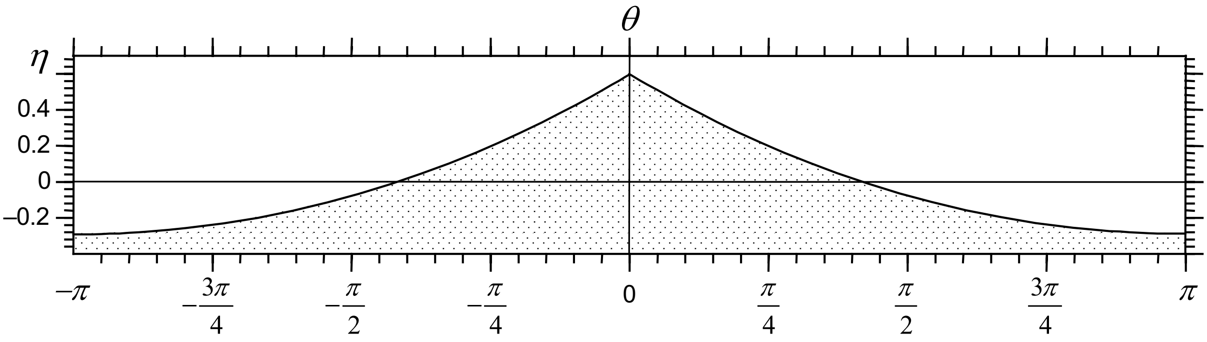


Рис. 8. Профіль граничної хвилі Стокса (нескінченна глибина), розрахований методом Мічелла.

Ольфе і Роттмен [136] (1980 р.) формалізували метод Мічелла і одержали загальну систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів b_n розкладу (128) та фазової швидкості c:

$$(3n+2)A_n-(3n+1)A_{n+1}-c^{-2}F_n=0, \quad n=\overline{0,N}, \qquad (130)$$

де N — число врахованих коефіцієнтів,

$$A_n=\frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{n}B_{n_1}B_{n-n_1}+\sum_{n_1=1}^{N-n}B_{n_1}B_{n+n_1}, \quad B_n=\sum_{n_1=0}^{N-n}b_{n_1}b_{n+n_1},$$

$$F_n=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n_1=0}^{N}\frac{(6n_1+1)\,b_{n_1}}{9(2n+1)^2-(6n_1+1)^2}, \quad b_0=1.$$

Амплітуда хвилі A знаходиться з виразу (79), враховуючи співвідношення (84):

$$A=2^{\frac{2}{3}}\frac{c^2}{4\pi}\left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n b_n\right)^2. \qquad (131)$$

Врахувавши $N=120$ коефіцієнтів, Ольфе і Роттмен [136] одержали $A\approx 0.141061$. Результати розрахунків з більшими N наведено в табл. 3. Відповідний профіль граничної хвилі Стокса зображено на рис. 8. З табл. 3 видно, що зі збільшенням N швидкість покращення точності розкладу Мічелла погіршується. Причина цьому — те, що розклади виду (128) не враховують ірраціональних степеней, вказаних Грантом [80].

Локальну поведінку навколо гребеня, що описується розкладом

Таблиця 3

Швидкість c та амплітуда A граничної хвилі Стокса (нескінченна глибина), розраховані з системи рівнянь (130) метода Мічелла

N	A	c	
100	0.14106002	1.09227679	$b_1 = 0.04119$
200	0.14106250	1.09228173	$b_2 = 0.01251$
300	0.14106307	1.09228335	$b_3 = 0.00605$
400	0.14106327	1.09228405	$b_4 = 0.00360$
500	0.14106337	1.09228441	$b_5 = 0.00240$

Гранта (122), який у комплексній площині u записується як

$$\zeta(u) = -\mathrm{i}\Big(\frac{3}{2}\,c\,(1-u)\Big)^{\frac{2}{3}} + \mathrm{i}\gamma\Big(c\,(1-u)\Big)^{2\mu}, \qquad (132)$$

можна врахувати за допомогою іншого більш загального підходу, що оснований на другому методі Стокса. Загальний розв'язок рівняння Лапласа (104) в комплексній площині u за умови симетричності хвилі має вигляд

$$\zeta(u) = \mathrm{i}a_0 + \mathrm{i}\ln u + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(u^n - \frac{\rho_0^{2n}}{u^n}\Big), \quad a_0 = \Big(\overline{\eta} - \frac{I}{c}\Big). \quad (133)$$

Якщо початок відліку в фізичній площині ζ обирається на гребені хвилі, то для хвилі з точкою застою на гребені маємо $\overline{\eta} = -B$ внаслідок умови (111). При цьому розклад (133) автоматично задовольняє рівняння Лапласа і граничну умову на дні, котра в комплексній формі внаслідок формули (84) записується як

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\Big) = 0, \quad \rho = \rho_0 = \exp(-d). \qquad (134)$$

Локальну поведінку біля кута на гребені можна врахувати, якщо скласти суму (лінійну комбінацію) розкладу (133) і локального розв'язку поблизу гребеня (132). Дійсно, у випадку глибокої води розв'язок Гранта (132) задовольняє граничну умову (134) на дні $u = 0$ за умови дійсності коефіцієнта γ. Тоді невідомі коефіцієнти

γ і a_n лінійної комбінації знаходяться з рівняння Бернуллі, наприклад, методом колокацій, так, щоб задовольнялась асимптотика (124) на нескінченній глибині.

Цю ідею запропонував і реалізував Уілльямс [173] (1981 р.), причому одразу для довільної глибини. При цьому головна проблема полягала в тому, що локальний розклад навколо гребеня (132) в загальному випадку довільної глибини не задовольняє граничну умову на дні. Для того, щоб виконати цю умову, Уілльямс узагальнив розклад Гранта так, щоб він одночасно описував локальну поведінку поблизу гребеня і задовольняв граничну умову на дні. В наших позначеннях цей узагальнений розклад має вигляд

$$\zeta(u) = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}\,c\right)^{\frac{2}{3}}\left(\left(1-u\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1-\frac{\rho_0^2}{u}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1-\rho_0^2\right)^{\frac{2}{3}}\right) + \mathrm{i}\gamma c^{2\mu}\left(\left(1-u\right)^{2\mu} - \left(1-\frac{\rho_0^2}{u}\right)^{2\mu} + \left(1-\rho_0^2\right)^{2\mu}\right). \tag{135}$$

Те, що гранична умова (134) на дні задовольняється кожним з обох доданків окремо, можна легко показати, якщо знайти похідну $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}u}$ і використати співвідношення

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta} = \mathrm{i}cu\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}, \tag{136}$$

що випливає безпосередньо з означення (125). Зауважимо, що врахування наступних доданків до розкладу Гранта, знайдених Норменом [135] у вигляді степеневого ряду по μ, не дало суттєвого покращення точності методу.

В такий спосіб Уілльямс [173] (1981 р.) побудував найточнішу на даний момент чисельну схему розрахунку граничної хвилі Стокса для *довільної глибини*. Зокрема, у випадку глибокої води Уілльямс одержав $c \approx 1.09228$ і $A \approx 0.141063$ та протабулював профіль хвилі, а також її різноманітні інтегральні характеристики. Взагалі в роботі Уілльямса представлено детально протабульовані розрахунки для 22 різних значень глибини. Цим задача чисельного розрахунку граничної хвилі Стокса була фактично розв'язана.

Зауважимо, що в своїх розрахунках Уілльямс [173] використав найменший корінь $\mu^{(1)} \approx 0.73467287$ трансцендентного рівняння Гранта (123). Насправді ж це рівняння має нескінченно багато коренів, наступні з яких є $\mu^{(2)} \approx 1.78662878$, $\mu^{(3)} \approx 2.80248266$, $\mu^{(4)} \approx 3.81026852$ і так далі. *Що ж буде одержано, якщо врахувати ці вищі корені замість першого?* Залишаємо це питання відкритим.

2.3.8. Математичні підтвердження гіпотез Стокса. Задача строгого математичного доведення існування точного розв'язку канонічної моделі (74)–(77), що відповідає наближеному розв'язку Стокса (105)–(106), турбувала математиків ще тривалий час після публікацій Стокса. Строге ж математичне обґрунтування знаменитих гіпотез Стокса взагалі було дане лише протягом кількох останніх десятиріч, а строгого доведення того, що гранична хвиля є хвилею максимальної висоти, досі немає, хоча це і вважається беззаперечним фактом (див. [39, с. 93] і [140, с. 350]).

Розглянемо рівняння Бернуллі

$$\frac{1}{2}\,q^2 + y = B, \quad \{\theta,\, y\} \in \mathit{\Gamma}_s\,, \tag{137}$$

де $\mathit{\Gamma}_s$ — рівняння вільної поверхні, а q за абсолютною величиною — модуль комплексної швидкості

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} = -q\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}. \tag{138}$$

Оскільки внаслідок співвідношень (84)

$$\phi_\theta = -q\cos\vartheta, \;\; \phi_y = -q\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{tg}\,\vartheta, \tag{139}$$

то ϑ є кутом нахилу поверхні до горизонтальної вісі. Нехай $\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ — елемент довжини вільної поверхні, тобто l — дугова змінна. Тоді

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l} = \cos\vartheta, \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} = \sin\vartheta; \qquad \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l} = -q \ \Rightarrow \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l} = -q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}. \tag{140}$$

Продиференціювавши рівняння Бернуллі (137) по дуговій змінній l і врахувавши співвідношення (140), остаточно одержимо зв'язок між модулем швидкості й кутом нахилу вільної поверхні

$$\frac{\mathrm{d}\frac{1}{3}q^3}{\mathrm{d}\phi} = \sin\vartheta, \quad \{\theta, y\} \in \Gamma_s. \tag{141}$$

Якщо поверхню хвилі відобразити на одиничне коло за допомогою відображення (125), то одержане рівняння набуває вигляду

$$\frac{\mathrm{d}\frac{1}{3}q^3}{\mathrm{d}s} = c\sin\vartheta, \quad \rho = 1, \ s \in [-\pi, \pi]. \tag{142}$$

На основі цього рівняння Некрасов [22] у 1921 р. переформулював канонічну модель для *симетричних* хвиль на глибокій воді у вигляді інтегрального рівняння (що носить його ім'я)

$$\vartheta(s) = \frac{1}{3\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{N}(s, t)\frac{\sin\vartheta(t)}{\frac{1}{\mu} + \int\limits_0^t \sin\vartheta(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{N}(s, t) = \ln\left(\frac{1}{\left|2\sin\left(\frac{s-t}{2}\right)\right|}\right), \tag{143}$$

де $\vartheta(s)$ — кут нахилу вільної поверхні до горизонтальної вісі в точці, що відповідає точці $s \in [-\pi, \pi]$ на одиничному колі (точки $s = \mp\pi$ відповідають двом сусіднім впадинам хвилі, а $s = 0$ — гребеню між ними). Параметр $3 \leqslant \mu < \infty$ визначається співвідношенням

$$\mu = \frac{3c}{|q(0)|^3},$$

де $q(0)$ — швидкість частинки на гребені у власній системі відліку хвилі, причому для лінійних хвиль $q(0) = -c$ і $\mu = 3$, а для граничної хвилі Стокса $q(0) = 0$ і $\mu = \infty$ (див. [24, розділ 1, §§1–4]).

У 1922 р. Некрасов [23], використовуючи теорію нелінійних інтегральних рівнянь, розробив метод доведення збіжності рядів. На основі цих досліджень він показав, що одержане ним інтегральне рівняння має розв'язок при достатньо малих значеннях амплітуди хвилі, тобто розклади Стокса є збіжними для хвиль малої амплітуди.[9] Узагальнення для скінченної глибини було завершене Некрасовим у 1927 р.[10] При цьому інтегральне рівняння для скінченної глибини відрізняється від рівняння (143) лише ядром

$$\mathcal{N}(s,\,t) = \ln\left(\frac{1}{\left|2\,\mathrm{sn}\left(\frac{\mathcal{K}(\kappa)}{\pi}\,(s-t)\,\middle|\,\kappa\right)\right|}\right),\quad \frac{\mathcal{K}\left(\sqrt{1-\kappa^2}\right)}{\mathcal{K}(\kappa)} = \frac{2d}{\pi}, \tag{144}$$

де sn — еліптичний синус, $\mathcal{K}(\kappa)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду з модулем κ, а d — незбурена глибина; а також межами зміни параметра μ: $3\,\mathrm{cth}(h) \leqslant \mu < \infty$ (див., наприклад, [20, с. 149–156]).

Доведення існування хвиль малої амплітуди для глибокої води також незалежно зробив Леві-Чивіта [91] (1925 р.), використовуючи те ж саме рівняння (142), але не переходячи до інтегрального рівняння. Струік [160] (1926 р.) узагальнив доведення Леві-Чивіта на випадок скінченної глибини (див. [33, с. 719–722]).

Красовський [14, 15] у 1960–1961 рр., використовуючи теорію додатних операторів, у загальному випадку довільної глибини довів, що для кожного $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{6}$ існує розв'язок інтегрального рівняння Некрасова при деякому значенні параметра μ такий, що *максимальний* нахил профілю хвилі дорівнює β. При цьому Кра-

[9] Ця робота А.І. Некрасова, хоча і була завершена ним у 1922 р. під назвою "О волнах установившегося вида. Глава III" (див. [25, с. 51]), але тоді так і не була опублікована, а лише представлена на "Першому міжнародному конгресі з теоретичної і прикладної механіки" у 1924 р. У повному ж обсязі доведення Некрасова було видане лише в 1951 р. у його монографії [24, розділ 1, §§5–7].

[10] Результати для скінченної глибини були представлені Некрасовим у 1927 р. на "Всеросійському з'їзді математиків" (див. [25, с. 399]). У повному обсязі ця робота була знову ж таки видана лише в 1951 р. [24, розділ 2].

совський не встановив (*i*) яким значенням параметра μ в рівнянні Некрасова відповідає проміжок $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{6}$, і (*ii*) чи існують розв'язки з $\beta \geqslant \frac{\pi}{6}$. Нарешті, узагальнивши підхід Красовського, Кеді і Норб'юрі [84] (1978 р.) показали, що для всіх скінченних μ $\big(3\,\mathrm{cth}(h) \leqslant \mu < \infty\big)$ існує неперервний нетривіальний розв'язок рівняння Некрасова, причому $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$. Цим було остаточно математично строго доведено існування сімейства розв'язків канонічної моделі з $-c \leqslant q(0) < 0$, що відповідає стоксовим хвилям скінченної амплітуди. Нез'ясованим залишалося питання про існування граничної хвилі Стокса з $q(0) = 0$ ($\mu = \infty$).

Знаменита робота Толенда [168] (1978 р.) поклала край сумнівам математиків. Толенд показав, що (*i*) існує нетривіальний розв'язок $\vartheta^{(\lim)}(s)$ рівняння Некрасова при $\mu = \infty$, що неперервний на всьому проміжку $[-\pi, \pi]$ за виключенням єдиної точки $s = 0$ (гребінь хвилі); (*ii*) цей розв'язок на проміжку $[-\pi, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \pi]$, $\forall\, \varepsilon > 0$, є рівномірною границею при $\mu \to \infty$ сімейства розв'язків зі скінченними μ; (*iii*) якщо розрив функції $\vartheta^{(\lim)}(s)$ скінченний (тобто профіль вільної поверхні неперервний на гребені), то $\lim\limits_{s \to 0+} \vartheta^{(\lim)}(s) = \frac{\pi}{6}$. Незалежне і більш просте доведення цих тверджень дав також Маклеод [130] (1979 р.). Єдине, що не було доведено в цих двох роботах, — скінченність розриву функції $\vartheta^{(\lim)}(s)$ при $s = 0$. Це остаточно вдалося показати в 1982 р. спільними зусиллями Еміку, Фраєнкелю і Толенду [38], а також незалежно Плотнікову [28], чим було остаточно доведено справедливість *першої* знаменитої гіпотези Стокса. Більш повний математичний аналіз вищезгаданих результатів можна знайти в огляді Толенда [169] (1996 р.).

Що стосується *другої* гіпотези Стокса, то для її доведення знадобилося ще два десятиріччя. Лише в новому тисячолітті Плотніков і Толенд [140] (2004 р.) довели, що рівняння Некрасова при $\mu = \infty$ має розв'язок $\vartheta^{(\infty)}(s)$ такий, що (*i*) $\lim\limits_{s \to 0+} \vartheta^{(\infty)}(s) = \frac{\pi}{6}$ і (*ii*) $\vartheta^{(\infty)}(s)$ монотонно зростає на проміжку $[\pi, 0)$, тобто профіль хвилі скрізь опуклий вниз. Проте питання, чи всі розв'язки рівняння Некрасова при $\mu = \infty$ мають таку властивість, залишається відкритим [140, с. 351].

Існує також другий підхід до теорії існування гравітаційних хвиль, оснований на варіаційних методах. Гарабедян [79] (1965 р.) показав, що умова мінімуму функціонала енергії призводить до існування періодичних хвиль сталої форми, хоча і не встановив інтервал амплітуд, для яких екстремальна задача має розв'язок. Спілвогель [155] (1970 р.) підтвердив теорію Гарабедяна, довівши існування хвиль достатньо малої, але скінченної амплітуди. Бабенко [1] (1987 р.) переформулював варіаційну задачу у вигляді операторного псевдо-диференціального рівняння і строго показав, що воно має розв'язок при амплітудах $A \lessapprox 0.013$ [2]. Буффоні та ін. [52] (2003 р.), узагальнивши результати Бабенко, розширили інтервал амплітуд, для яких відомо, що екстремальна задача має точний розв'язок, до $A \lessapprox 0.032$. Незважаючи на ці результати, зрозуміло, що інтегральне рівняння Некрасова забезпечує більш загальний підхід до теорії існування гравітаційних хвиль.

Питання про *єдиність* розв'язку канонічної моделі й рівняння Некрасова для кожного $-c \leqslant q(0) \leqslant 0$ $\big(3\,\mathrm{cth}(h) \leqslant \mu \leqslant \infty\big)$ залишається *відкритим*. Наприклад, Емік [39, с. 93] відмічає: “Різноманітні чисельні розрахунки…показують, що існує єдине ϑ для кожного $\mu > 3$, і що амплітуда хвилі, тобто висота від впадини до гребеня, монотонно зростає з ростом μ. (Нажаль, жоден з цих результатів не був доведений строго.)”. Чендлер і Грехем [54, с. 1042] зауважують: “Можливо це і дивує, але досі невідомо чи додатний $\big(\vartheta(s) > 0,$ — І.Г.$\big)$ розв'язок Стокса єдиний, або ж він біфуркує до кратних розв'язків при збільшенні μ (хоча всі розрахунки і показують, що додатний розв'язок єдиний, і біфуркацій немає)." Також на даний момент *невідомо*, чи гранична хвиля Стокса є єдиним розв'язком рівняння Некрасова при $\mu = \infty$ [140, с. 351], тобто *чи існують гостро-гребеневі розв'язки канонічної задачі, інші за граничну хвилю Стокса*.

2.3.9. Круті хвилі та методи їх розрахунку. З ростом амплітуди гребені стоксових хвиль загострюються, а профіль хвилі стає більш крутим (порівняно з синусоїдальною формою). Це робить задачу суттєво нелінійною, і вже при амплітудах $A \simeq 0.1$ кількох доданків теорії збурень, знайдених Стоксом і його послідовниками, стає недостатньо для правильного опису властивостей хвиль. Більш того, взагалі виникає проблема збіжності цих малоамплітудних розкладів. Хвилі з $A \gtrsim 0.1$ називатимемо *крутими*[11] або *хвилями великої амплітуди*.

Дослідження властивостей крутих хвиль стало можливим лише завдяки виникненню комп'ютерів (електронно обчислювальних машин), що надало новітній поштовх усій науці взагалі й гідродинамічним задачам зокрема. Одним з перших, хто застосував нові можливості для розв'язку рівнянь канонічної моделі гідродинаміки, був Чеппелір [55] (1961 р.). Він врахував перші дев'ять доданків (обрізаний ряд Фур'є) у загальному розв'язку рівняння Лапласа (99) і, знайшовши методом колокацій відповідні коефіцієнти розкладів, розрахував декілька профілів крутих хвиль при кількох різних значеннях глибини, а також порівняв результати з розкладами Стокса п'ятого порядку.

Насправді ж революційну роботу зробив Шварц [151] (1974 р.), побудувавши за допомогою комп'ютерної арифметики стоксові розклади для довільної глибини з точністю до $O(A^{48})$, а для гли-

[11]steep waves (англ.)

бокої води з точністю до $O(A^{117})$. Шварц використав другий метод Стокса в оберненій площині u, застосувавши вперше в загальній формі розклад (133). Підставивши цей розклад у рівняння Бернуллі й прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях u, Шварц одержав *нелінійну* алгебраїчну систему рівнянь для невідомих коефіцієнтів a_n і швидкості хвилі c. Прямий розв'язок цих рівнянь у той час був неможливий, тому Шварц побудував теорію збурень, розклавши невідомі величини в степеневі ряди по малому параметру ε:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\,\varepsilon^{n+2k}, \quad c^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\,\varepsilon^{2k}. \tag{145}$$

Для розрахунку коефіцієнтів a_{nk} і γ_k було одержано загальні рекурентні формули.

Обравши спочатку $\varepsilon = a_1$ — амплітуду першої гармоніки, Шварц [151] встановив, що при достатньо великих значеннях a_1 збіжність амплітудних розкладів (145) значно погіршується, і врешті решт вони розбігаються. Для того, щоб збільшити радіус збіжності рядів теорії збурень, Шварц використав Паде-апроксимації. Він показав, що розбіжність теорії збурень по амплітуді першої гармоніки a_1 обумовлена тим, що a_1 не є монотонною функцією висоти хвилі A і має максимум (у випадку глибокої води при $A \approx 0.13$) до того, як досягається гранична висота. Цей максимум і визначає радіус збіжності амплітудних розкладів. Оскільки висота хвилі A монотонно зростає до граничного значення, то збіжність можна покращити, якщо обрати $\varepsilon \sim A$, як це і зробив Шварц, поклавши $\varepsilon = 2A$. Розклади за цим параметром дали можливість просунутись до майже граничних амплітуд, хоча все одно знадобилося використання Паде-апроксимацій для покращення точності. Для глибокої води Шварц одержав $A_{\max} = 0.1412$, що збіглося з розрахунками Ямади [176] безпосередньо граничної хвилі Стокса.

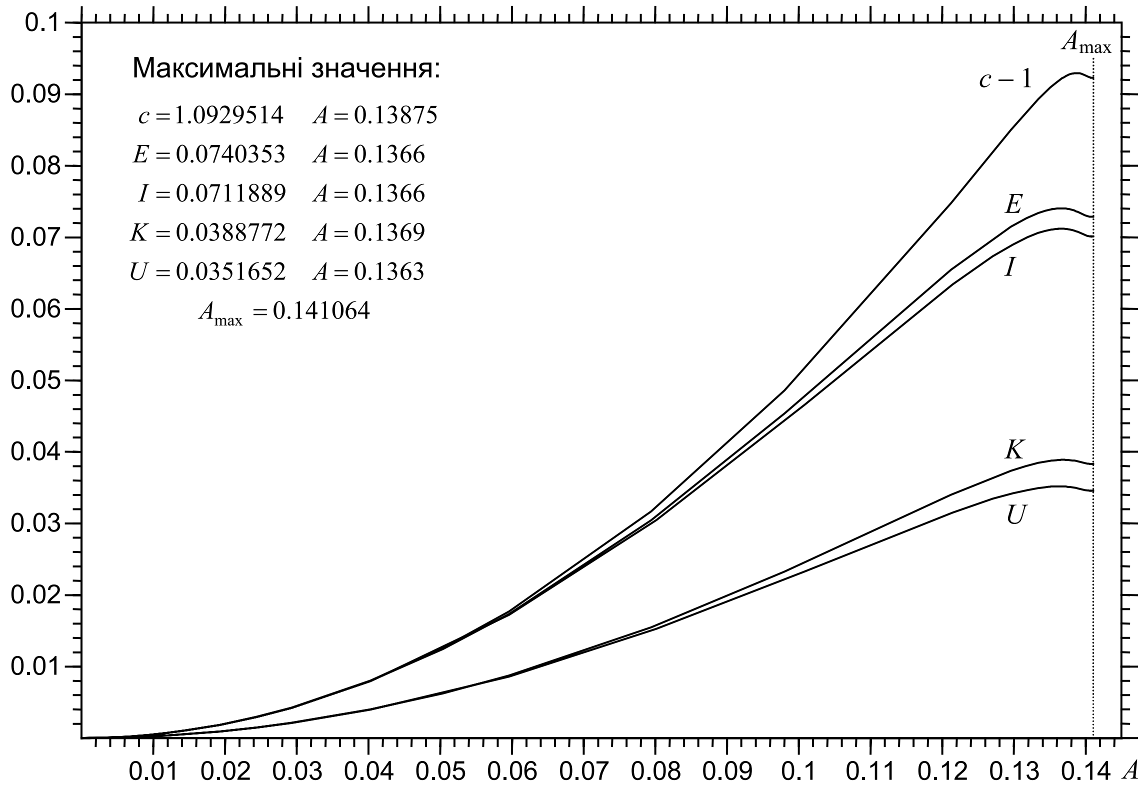


Рис. 9. Залежності фазової швидкості c стоксових хвиль, їх повної, потенціальної і кінетичної енергій E, U і K та імпульсу I від амплітуди A.

Нарешті, Шварц [151] дав чисельне підтвердження результату Гранта [80], що хвилі дограничної форми мають особливу точку, яка знаходиться над гребенем хвилі і має сингулярність порядку $\frac{1}{2}$, а не $\frac{2}{3}$, як у граничної хвилі Стокса.

Лонге-Хіггінс [96] (1975 р.) у випадку глибокої води перерахував розклади Шварца з параметром $\varepsilon = 2A$ в розклади по параметру $\varepsilon^2 = \upsilon = 1 - \frac{q^2(0)\,q^2(\pi)}{c^2 c_0^2}$, що, як виявилось, збігаються швидше. Тут $q(0)$ і $q(\pi)$ — швидкості частинок відповідно на гребені й впадині хвилі (у власній системі відліку хвилі), c_0 — фазова швидкість лінійної хвилі. Новий параметр υ окрім кращої збіжності дає ту перевагу, що межі його зміни відомі завчасно: він зростає від $\upsilon = 0$ для лінійної хвилі до $\upsilon = 1$ для хвилі граничної форми. Одержавши розклади з точністю $O(\upsilon^{40})$, Лонге-Хіггінс виявив, що, подібно до амплітуди першої гармоніки, фазова швидкість хвилі c, її повна, потенціальна і кінетична енергії E, U і K та імпульс I також не є монотонними функціями амплітуди хвилі A, а набувають максимальних значень і потім спадають до того, як досягається гранична амплітуда. Відповідні залежності подано на рис. 9 (розрахунок проведено методами звичайних і дробових Фур'є розкладів, див. розділ 2.3.10). Таким чином, *хвиля максимальної висоти не є найшвидшою і не має найбільшу енергію та імпульс*, як це вважалося з часів Стокса. Коуклет [62] (1977 р.) показав, що цей результат залишається справедливим для всіх значень глибини, застосувавши метод Шварца для побудови розкладів по параметру $\varepsilon^2 = 1 - \frac{q^2(0)q^2(\pi)}{c^4}$ з точністю до $O(\varepsilon^{110})$. Він встановив, що ще багато інших інтегральних характеристик хвилі набувають максимальних значень до того, як досягається гранична амплітуда. Для глибокої води Коуклет [62] одержав $A_{\max} = 0.14105$.

Зауважимо, що максимум фазової швидкості хвилі фактично вперше одержали Сасакі і Муракамі [150] (1973 р.), проте недостатня точність їх розрахунків не дала авторам сміливість стверджувати, що максимум швидкості дійсно має місце.

Степеневі розклади Шварца [151], Лонге-Хіггінса [96] і Коуклета [62] навіть при використанні Паде-апроксимацій стають непридатними при підході до граничної висоти. Для розрахунку майже найвищих хвиль необхідно розв'язувати повну нелінійну алгебраїчну систему рівнянь для коефіцієнтів загальних Фур'є розкладів (102) у фізичній площині (перший метод Стокса) або (104) в оберненій площині (другий метод Стокса). Перевага останнього полягає в тому, що в оберненій площині вільна поверхня відома і задається горизонтальною лінією $\psi = 0$. Це надає можливість значно спростити розрахунки. Так, Лонге-Хіггінс [99] (1978 р.) встановив прості квадратичні співвідношення між коефіцієнтами a_n розкладу (104), що замінили значно складнішу алгебраїчну систему кубічних рівнянь, яка виникає при безпосередній підстановці Фур'є розкладу (104) в рівняння Бернуллі. Відповідно метод, що оснований на цих квадратичних співвідношеннях, одержав назву *метода Лонге-Хіггінса* і внаслідок своєї простоти став стандартним методом розв'язку канонічної задачі в оберненій площині. Детальний виклад методу даний Лонге-Хіггінсом у роботах [107] (1984 р.) і [109] (1985 р.) для нескінченної глибини та [113] (1988 р.) для скінченної глибини. Зауважимо, що метод на основі квадратичних співвідношень Лонге-Хіггінса [99] для випадку глибокої води вперше реалізував Сеффмен [145] (1980 р.), а для скінченної глибини — Маклін [128] (1982 р.).

Лонге-Хіггінс [96] (1975 р.) також строго довів співвідношення (що справедливі для довільної глибини)

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}(K+U) = c\,\mathrm{d}I, \quad \mathrm{d}\mathscr{L} = \mathrm{d}(K-U) = I\,\mathrm{d}c, \qquad (146)$$

де $\mathscr{L}$ — функція Лагранжа. Отже, екстремуми імпульсу і повної енергії співпадають, а також екстремуми фазової швидкості й функції Лагранжа.

Окрім появи екстремуму фазової швидкості й інших інтегральних характеристик хвилі при підході до граничної висоти проявляється ще один визначальний ефект. Так, Сасакі і Муракамі [150] (1973 р.) встановили, що для хвиль майже граничної форми максимальний кут нахилу ϑ вільної поверхні до горизонту поблизу гребеня перевищує 30°, хоча, як відомо, для граничної хвилі Стокса він в точності має дорівнювати $\frac{\pi}{6}$. Лонге-Хіггінс і Фокс [98] (1977 р.) надали підтвердження і обґрунтування цього результату, розробивши асимптотичну теорію майже найвищих хвиль. Для цього вони обрали положення нульового рівня $y = 0$ так, щоб константа в правій частині рівняння Бернуллі (35) дорівнювала нулю.

Для цього потрібно покласти

$$\overline{\eta} \equiv -L = -\left(\frac{c^2}{2g} + \frac{\overline{\Phi_x^2}|_{y=-h}}{2g}\right),$$

тобто перемістити початок відліку вгору на відстань L від середнього рівня хвилі. В цій системі координат гребінь хвилі знаходиться нижче початку відліку на відстані

$$l = \frac{q^2(0)}{2g}, \tag{147}$$

оскільки з рівняння Бернуллі маємо $\eta(0) = -l$. Обраний початок відліку збігається з гребенем граничної хвилі, де вона має особливу точку і утворює гострий 120° кут. При цьому в новій системі координат усі хвилі мають різні положення середнього рівня. Характерна довжина l показує, наскільки кожна хвиля близька до граничної.

Лонге-Хіггінс і Фокс [98] поставили задачу знайти форму майже найвищих хвиль поблизу гребеня, тобто побудувати локальний розв'язок, який замість того, щоб задовольняти граничну умову на дні, наближався би при $r \to \infty$ (де r — відстань від початку координат до поверхні хвилі) до локального кута Стокса, що задається двома асимптотами $\vartheta = \pm\frac{\pi}{6}$. Цей розв'язок і відповідний потік рідини було названо *внутрішнім*. Виявилось, що в безрозмірних змінних r/l такий розв'язок єдиний, і його асимптотична поведінка (при $r \gg l$) визначається комплексною парою коренів $\mu \approx -\frac{1}{6} \pm 0.35715116\,\mathrm{i}$ того самого трансцендентного рівняння (123), що знайшов Грант [80]. (У противагу до дійсних коренів, число яких нескінченне, рівняння Гранта має лише єдину пару комплексно спряжених коренів, звідки і випливає єдиність знайденої асимптотики). При цьому Лонге-Хіггінс і Фокс одержали трансцендентне рівняння для дещо іншого параметра $\mathrm{i}\nu = \frac{1}{3} + 2\mu$, і комплексній парі коренів рівняння Гранта відповідає $\nu_{\pm} \approx \pm 0.71430232$.

Для того, щоб розрахувати внутрішній потік на відстанях $r \sim l$, Лонге-Хіггінс і Фокс [98] використали підхід, схожий на метод Мічелла (128), і на основі одержаних даних побудували просту асимптотичну апроксимацію профілю внутрішнього розв'язку, а саме

$$\cos\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)\right)=\frac{3}{2}\,a_p\left(\frac{r}{l}\right)^{-\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{3}{2}\nu_{+}\ln\left(\frac{r}{l}\right)+b_p\right), \qquad (148)$$

де $a_p \approx 0.78$ і $b_p \approx 0.18$ — підгоночні параметри. Видно, що профіль осцилює навколо асимптот $\vartheta = \pm\frac{\pi}{6}$, причому амплітуда цих осциляцій затухає з ростом r, а максимальний кут нахилу вільної поверхні, як розрахували Лонге-Хіггінс і Фокс, складає $\approx 30.37°$. При цьому, оскільки розв'язок залежить від змінної r/l, окіл $\triangle r$, в якому відбуваються осциляції профілю, зменшується зі зменшенням характерної довжини l так, що ефект зникає в граничному випадку $l = 0$, котрий відповідає хвилі максимальної висоти.

У наступній роботі Лонге-Хіггінс і Фокс [103] (1978 р.) для випадку глибокої води показали, як одержаний *внутрішній* потік асимптотично зшити з *зовнішнім* потоком, що задовольняє граничну умову на дні. Цей зовнішній розв'язок було побудовано з тієї умови, що він має в границі $l \to 0$ задовольняти асимптотику Гранта (122), а, з іншого боку, асимптотику, що зшивається з внутрішнім розв'язком (148). Значення параметру γ в розкладі Гранта було підібрано так, щоб він максимально точно апроксимував граничну хвилю Стокса, яку Лонге-Хіггінс і Фокс розрахували, модифікувавши метод Некрасова (129), хоча це фактично і не дало покращення точності порівняно зі стандартним методом Мічелла (128). В результаті зробленої зшивки було отримано прості асимптотичні формули для розрахунку квадрату фазової швидкості, кінетичної і потенціальної енергій, імпульсу та середнього рівня майже найвищих хвиль. Якщо f — якась з вказаних величин, то її поведінка при малих $\varepsilon = l \cdot k$ (k — хвильовий вектор) виражається співвідношенням

$$f = f_* - a_f\, \varepsilon^3 \cos\bigl(3\nu_+ \ln\varepsilon + b_f\bigr), \tag{149}$$

де f_* — граничне значення величини f; $a_f > 0$ і b_f — сталі, що залежать від вибору f і визначаються з умов зшивки зовнішнього і внутрішнього розв'язків. Зокрема, для квадрату фазової швидкості $f = c^2$ було одержано оцінку $c_*^2 = 1.1931$, $a_f \approx 1.18$, $b_f \approx 2.22$. З виразу (149) видно, що *фазова швидкість хвилі та її інтегральні характеристики при підході до хвилі граничної форми показують осциляторну поведінку і мають нескінченне число локальних максимумів і мінімумів затухаючої амплітуди*. Асимптотична поведінка висоти хвилі інша:

$$A = A_* - (2\pi)^{-1}\varepsilon^2 + a_A\, \varepsilon^3 \cos\bigl(3\nu_+ \ln\varepsilon + b_A\bigr), \tag{150}$$

де підгоночні значення сталих, що розрахували Лонге-Хіггінс і Фокс, складають: $A_* = 0.14107$, $a_A \approx 0.16$, $b_A \approx -1.54$. Осциляторна поведінка A недостатня, щоб перевищити її монотонне зростання зі зменшенням ε. Таким чином, *гранична гостро-гребенева хвиля найвища, проте не найшвидша*.

Лонге-Хіггінс і Фокс [103] також показали, що аналітичне продовження поля швидкості, одержаного в рамках асимптотичної теорії майже найвищих хвиль, містить сідлову точку над гребенем хвилі, як це встановив Грант [80].

Зауважимо, що асимптотична теорія Лонге-Хіггінса і Фокса в принципі справедлива для довільної глибини, проте чисельні значення параметрів було підібрано лише для випадку глибокої води. Пізніше Лонге-Хіггінс і Фокс [116] (1996 р.) показали, що асимптотичні формули дають точніші результати, якщо підгоночні параметри визначати не з умов зшивки (що носять більш якісний, ніж кількісний характер), а так, щоб вони якнайкраще апроксимували зроблені з достатньою точністю чисельні розрахунки майже найвищих хвиль.

Справедливість асимптотичної теорії Лонге-Хіггінса і Фокса підтвердив Уілльямс [174] (1985 р.), узагальнивши свій метод розрахунку граничної хвилі Стокса (Уілльямс [173], 1981 р.) на випадок майже найвищих хвиль. При цьому він використав ідею Гранта про те, що особливість порядку $\frac{2}{3}$ граничної хвилі утворюється поєднанням кількох сингулярностей порядку $\frac{1}{2}$. Для широкого діапазону глибин безпосереднім розрахунком він одержав одне й те ж саме значення $\approx 30.37°$ максимального кута нахилу вільної поверхні, а також розрахував перший мінімум фазової швидкості хвилі й її інших інтегральних характеристик.

Строге математичне доведення того факту, що при підході до хвилі граничної форми максимальний кут нахилу вільної поверхні до горизонту перевищує 30°, дав Маклеод [130] (1979 р.), довівши для загального випадку довільної глибини таке твердження. Якщо $\vartheta^{(\mu)}(s)$ — послідовність розв'язків інтегрального рівняння Некрасова (143), що при $\mu \to \infty$ прямує до розв'язку $\vartheta^{(\mathrm{lim})}(s)$ рівняння Некрасова з $\mu = \infty$, то при достатньо великих μ має задовольнятись нерівність

$$\sup_{s \in [0,\,\pi]} \vartheta^{(\mu)}(s) > \frac{\pi}{6}.$$

Пізніше Емік [39] (1987 р.) строго показав, що будь-який додатний розв'язок $\big(\vartheta(s) > 0\big)$ рівняння Некрасова з $\mu < \infty$ задовольняє оцінку згори $\vartheta(s) < 31.15°$.

Емік [39, с. 93] також вказав, що осциляторна поведінка профілю хвилі при наближенні до хвилі граничної форми є ніщо інше, як феномен Гіббса (див. [41, с. 836–839]), коли розривні функції або неперервні функції з розривними похідними апроксимуються

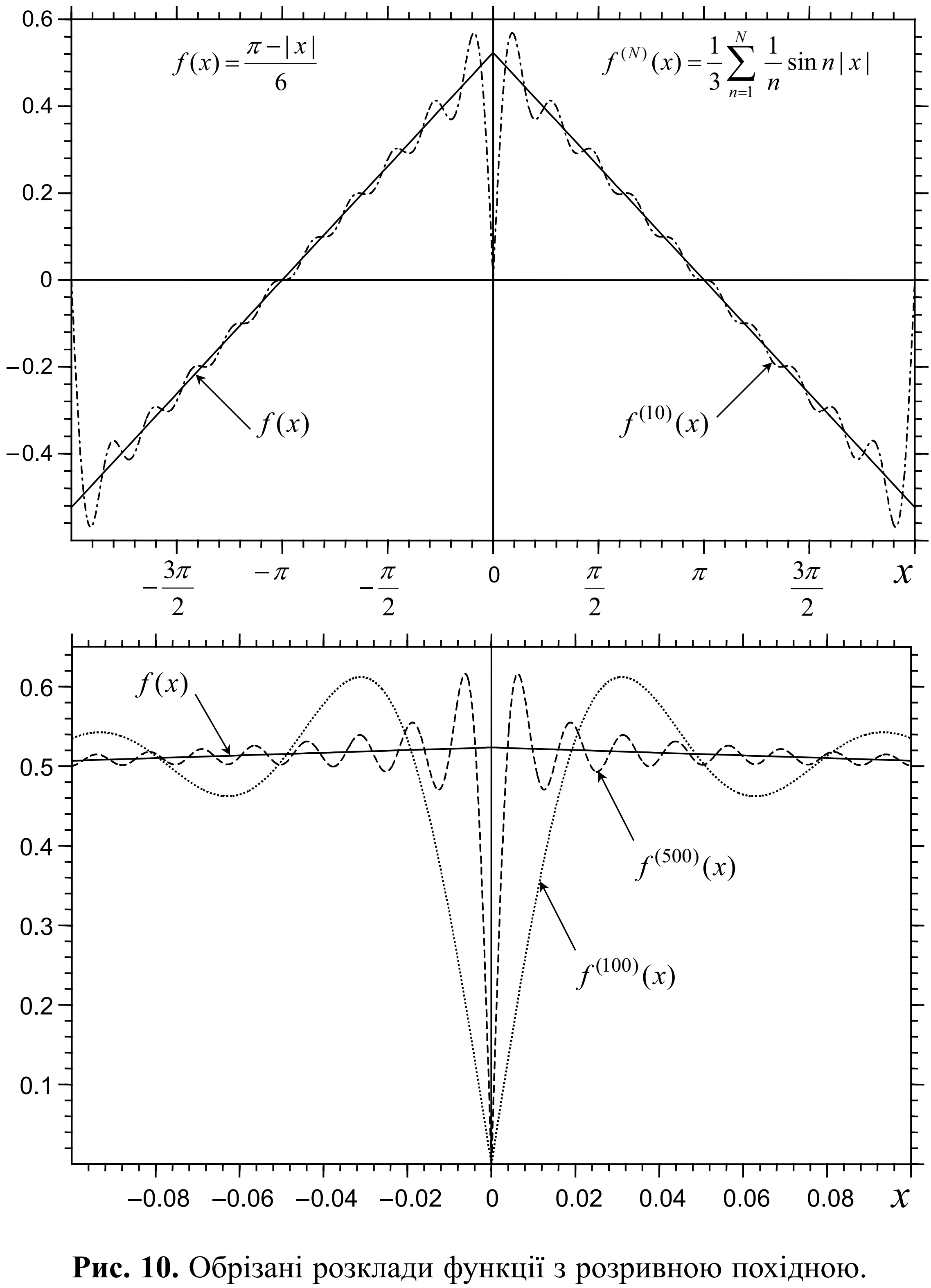


Рис. 10. Обрізані розклади функції з розривною похідною.

обрізаними рядами. Коли неперервні функції $\vartheta^{(\mu)}(s)$ наближаються до розривної функції $\vartheta^{(\lim)}(s)$ при $\mu \to \infty$, то поведінка профілю біля гребеня $s = 0$ для великих μ подібна збіжності ряду

$$f^{(N)}(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin n\,|x|}{n}$$

на проміжку $(-2\pi,\ 2\pi)$ до функції

$$f(x) = \frac{\pi - |x|}{6}$$

при $N \to \infty$ (див. рис. 10). Хоча суми $f^{(N)}(x)$ і сходяться до функції $f(x)$, проте феномен Гіббса забезпечує те, що вони осцилюють навколо $\frac{\pi}{6}$. При збільшенні N осциляції локалізуються навколо точки $x = 0$, а їх період зменшується, проте максимальна амплітуда осциляцій (надвишок поблизу $x = 0$) залишається майже сталою.

Чендлер і Грехем [54] (1993 р.) для випадку глибокої води підтвердили існування феномену Гіббса в чисельних розв'язках рівняння Некрасова при підході до граничної висоти. Було встановлено, що максимальна амплітуда осциляцій Гіббса складає $\approx 30.3787032466^\circ$. При цьому для чисельного розв'язку рівняння Некрасова Чендлер і Грехем [54] використали суттєво нерівномірну сітку (з насиченням біля гребеня хвилі) з максимум $N = 1026$ точок на інтервалі $s \in [0,\ \pi]$.

На рис. 11 наведено результати розрахунків першої похідної профілю вільної поверхні η_θ (тангенс кута нахилу до горизонтальної вісі) майже найвищих стоксових хвиль, одержані методом дробових Фур'є розкладів (див. розділ 2.3.10). Видно, що поблизу гребеня нахил вільної поверхні дійсно перевищує 30°, тобто $|\eta_\theta| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Окрім інтегрального рівняння Некрасова одержано ще багато інших інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь для розрахунку прогресивних хвиль. Переважна частина цих рівнянь

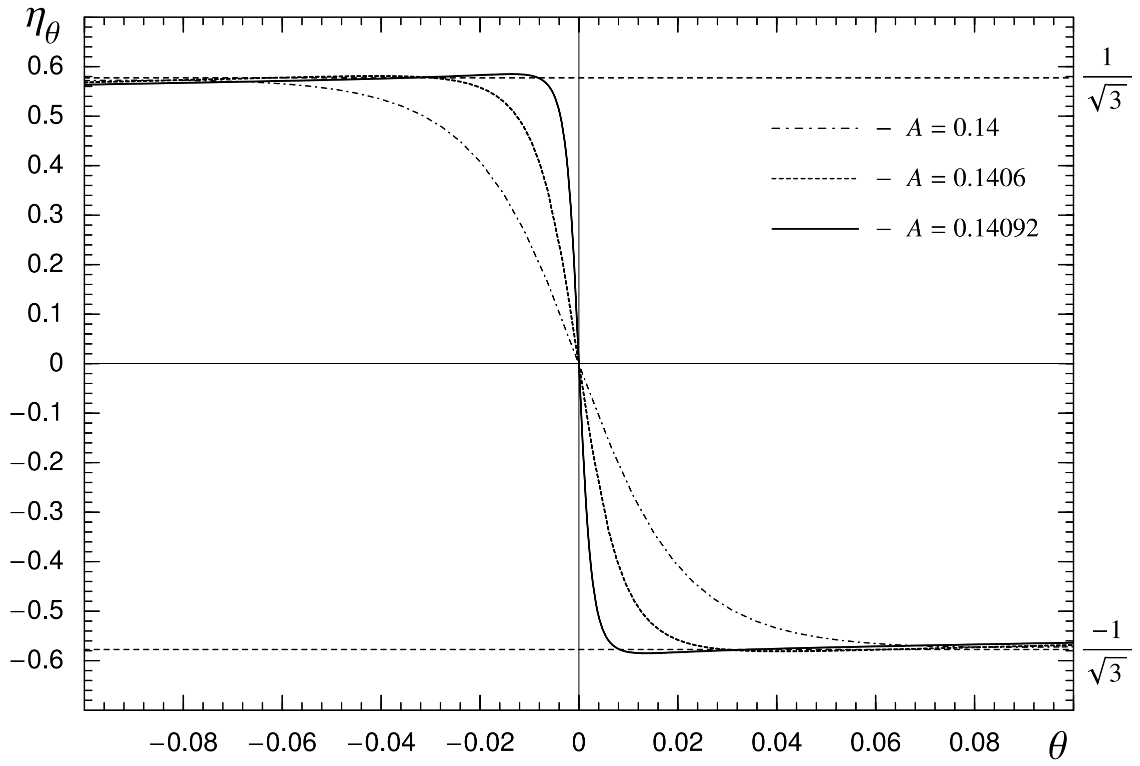


Рис. 11. Перша похідна профілю вільної поверхні майже найвищих стоксових хвиль (тангенс кута нахилу) поблизу гребеня (нескінченна глибина). Амплітуда хвиль складає 99.25%, 99.67%, 99.90% від $A_{\max}$.

виводиться за такою схемою. Оскільки комплексний потенціал — аналітична функція в області Ω, що зайнята рідиною, то його значення в будь-якій точці ζ_0 всередині області $G \in \Omega$ виражається через значення на границі Γ цієї області за допомогою інтеграла Коші [29, с. 48]

$$w(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{\Gamma} \frac{w(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\, \mathrm{d}\zeta. \tag{151}$$

У випадку періодичних хвиль контур Γ обирається таким чином, щоб цілком охоплювати період хвилі від дна до вільної поверхні: $\Gamma = \Gamma_s + \Gamma_- + \Gamma_b + \Gamma_+$, де Γ_s і Γ_b — ділянки контура Γ, що належать відповідно вільній поверхні й дну, а Γ_+ і Γ_- — його вертикальні бічні ділянки, що з’єднують дно та поверхню і розташовані на відстані періоду хвилі одна від одної. Інтеграл по горизонтальному дну Γ_b завжди легко розраховується, а інтеграли по Γ_+ і Γ_- взаємно скорочуються внаслідок періодичності. Таким чином, інтеграл Коші (151) виражає значення комплексного потенціалу в будь-якій точці ζ_0 всередині рідини через значення комплексного потенціалу на вільній поверхні Γ_s. Інтегральне рівняння одержується, якщо точку ζ_0 обрати на вільній поверхні. При цьому, хоча інтеграл Коші в звичайному розумінні й розбігається, значення функції $w(\zeta_0)$ дорівнює його подвоєному головному значенню [29, с. 49]. Методи, що основані на цій ідеї, називаються *контурно-інтегральними* і є одними з найточніших методів розрахунку поверхневих хвиль. У багатьох з них замість комплексного потенціалу розглядаються інші аналітичні функції, що описують потік рідини, наприклад, комплексна швидкість.

Так, Роттмен і Ольфе [144] (1979 р.) одержали інтегро-диференціальне рівняння для профілю хвилі $y = \eta(\theta)$ у фізичній площині, а Блур [47] (1978 р.) — для кута нахилу ϑ вільної поверхні до горизонтальної вісі. Обидва ці рівняння окрім сили тяжіння враховують також поверхневий натяг. Раніше Байатт-Сміт [53] (1970 р.) отримав інтегральне рівняння для профілю хвилі в оберненій площині w. Шварц і Ванден-Броуек (1979 р.) у роботах [152] для нескінченної глибини (з врахуванням поверхневого натягу) та [170] для скінченної глибини одержали інтегро-диференціальне рівняння для вільної поверхні в оберненій площині u і вперше розрахували *перший локальний мінімум* фазової швидкості та кінетичної і потенціальної енергій хвилі. Чен і Сеффмен [57] (1979 р.) для випадку глибокої води, враховуючи поверхневий натяг, отримали інтегро-диференціальне рівняння для профілю хвилі в фізичній площині, застосувавши параметризацію вільної поверхні дуговою змінною (відстань від гребеня вздовж поверхні до її довільної точки). Пізніше Сіммен і Сеффмен [154] (1985 р.) розширили це рівняння на випадок сталої завихреності (що відповідає

Таблиця 4

Екстремуми фазової швидкості c стоксових хвиль, розраховані методом Танаки (нескінченна глибина)

Екстремум c	υ	A	c
перший max	0.8637	0.138753	1.092951384
перший min	0.9685	0.140920	1.092276839
другий max	0.9927	0.141056	1.092285150
другий min	0.9985	0.141063	1.092285047

існуванню додаткової сталої течії або сталого вітру), а також використали додаткову параметризацію, що автоматично зосереджує чисельну сітку поблизу гребеня при наближенні до граничної хвилі. Завдяки цьому вдалося значно підняти точність розрахунків. Зокрема, для граничної хвилі Сіммен і Сеффмен [154] одержали $c \approx 1.092285$ і $A \approx 0.141064$, що було дуже близько до розрахунків Уілльямса [173] безпосередньо граничної хвилі Стокса (див. розділ 2.3.7). Сільва і Перегрін [167] (1988 р.) узагальнили інтегро-диференціальне рівняння Сіммена і Сеффмена на випадок скінченної глибини, а також використали його для розрахунку хвилі граничної форми.

Одним з найточніших і найшвидших контурно-інтегральних методів є метод Танаки, запропонований ним у роботі [165] (1986 р.) для поодиноких хвиль і розширений пізніше на випадок періодичних хвиль для довільної глибини в комп'ютерній програмі `Stokes_finite.f`[12] [166]. На основі рівняння (141), що виражає зв'язок між модулем швидкості q й кутом нахилу ϑ вільної поверхні, Танака одержав інтегральне рівняння, що визначає залежність між функцією $\ln q$ і кутом ϑ. Параметром рівняння є величина

[12] Автор вдячний професору Міцухіро Танаці за люб'язно надану копію цієї програми.

$$\upsilon = 1 - \frac{q(0)}{q(\pi)}. \tag{152}$$

Для лінійної хвилі $\upsilon = 0$, а для граничної хвилі $\upsilon = 1$. Одержане інтегральне рівняння розв'язується методом послідовних наближень. Для згущення вузлів чисельної сітки навколо гребеня, що докорінно покращує точність розв'язку, було використано нелінійне перетворення

$$\phi = \phi' - \gamma \sin\varphi', \quad 0 \leqslant \gamma < 1, \tag{153}$$

яке запропонували раніше Чен і Сеффмен [58] (1980 р.). Ефект тим сильніший, чим параметр γ ближчий до одиниці. Незважаючи на потужність методу, результати розрахунків періодичних хвиль Танака схоже так і не опублікував. Метод Танаки у випадку глибокої води з величезною точністю вже при $N = 1000$ вузлів дає *другий локальний максимум* фазової швидкості хвилі, а при $N = 3500$ — її *другий локальний мінімум*[13] (див. табл. 4).

За найбільш же точні на сьогодні оцінки швидкості й амплітуди граничної хвилі можна вважати результати Маклакова [125] (2002 р.). Він також безпосереднім чисельним розрахунком одержав *другий максимум* і *другий мінімум* фазової швидкості й інших інтегральних характеристик хвилі, провівши точні розрахунки до амплітуди, що складає 99.99997% від граничного значення, хоча і не протабулював одержані результати. Для цього Маклаков застосував спеціально розроблену модифікацію контурноінтегрального методу, коли для одержання потрібної точності виявилось достатньо сітки з максимум $N = 2000$ точок. При цьому перевага над методом Танаки полягає в тому, що для одержання тієї ж самої точності необхідне менше число точок. Далі, Маклаков використав свої розрахунки для уточнення значень підгоночних параметрів в асимптотичних формулах (149), (150) Лонге-Хіггінса

[13] Автор вдячний Марку Французу за проведення розрахунків другого мінімуму.

і Фокса для випадку глибокої води, а також розрахував значення цих сталих для широкого діапазону глибин, показавши, що асимптотичні формули застосовні й для випадку скінченної глибини. Уточнені асимптотичні співвідношення дали безпрецедентно точні значення характеристик граничної хвилі, зокрема для глибокої води $c^2 = 1.1930866274$ ($c = 1.0922850486$) і $A = 0.14106348398$. Хоча ці значення і не одержані прямим розрахунком, є мало сумнівів, що вони вірні.

2.3.10. Методи фізичної площини. Незважаючи на всю різноманітність розглянутих підходів до розрахунку двовимірних прогресивних гравітаційних хвиль сталої форми, всі вони використовують метод *оберненої площини*. Він має той недолік, що розрахунок залежності локальних величин, таких як поле швидкості, від просторових координат перетворюється в додаткову задачу, хоча це і не є принциповою складністю. Визначальним же є те, що метод оберненої площини незастосовний до задач розрахунку *тривимірних хвиль*, які в останнє десятиріччя набувають все вагомішого значення (див., наприклад, огляд Діаса і Харіфа [69], 1999 р.), оскільки функція струму — суттєво двовимірне поняття. Для розрахунку тривимірних хвиль можуть бути використані лише методи *фізичної площини*. Тривимірні хвилі, що періодичні як вздовж напряму свого розповсюдження, так і вздовж перпендикулярного до нього горизонтального напряму, називаються *коротко-гребеневими хвилями*[14]. Перший метод Стокса (99) легко узагальнюється для коротко-гребеневих хвиль, це в загальному вигляді вперше проробили Робертс і Шварц [143] (1983 р.). Відмінність від двовимірних хвиль полягає в тому, що розклади ведуться не по одній, а по двом просторовим змінним, відповідно виникають по-

[14]short-crested waves (англ.)

двійні суми, і кількість невідомих коефіцієнтів квадратично збільшується. Коефіцієнти обрізаних рядів Робертс і Шварц знаходили методом колокацій. Зважаючи на можливості тодішньої техніки, було враховано максимум $N = 10$ гармонік, що явно недостатньо для правильного розрахунку крутих хвиль. На сьогодні швидкість комп'ютерів зросла на кілька порядків, але навіть цього прогресу замало, щоб задовольнити квадратичну залежність N^2 кількості невідомих коефіцієнтів — необхідно покращувати сам метод.

Для двовимірних хвиль фактично відомі лише кілька загальних реалізацій методу фізичної площини. Це є реалізація Рінекера і Фентона [142] (1981 р.) першого методу Стокса, де коефіцієнти Фур'є розкладу потенціалу швидкості розраховуються методом колокацій, а також реалізація Жуфірії [181] (1987 р.) методу гамільтонівського формалізму, що технічно, але не по суті, дещо відрізняється від стандартного методу Стокса. Рінекер і Фентон проробили розрахунки з точністю до $N = 64$, а Жуфірія — до $N = 72$, що виявилось достатнім лише для одержання першого локального максимуму фазової швидкості хвилі. Метод Жуфірії не набув подальшого розповсюдження. Недоліком же підходу Рінекера і Фентона є те, що метод колокацій має гіршу чисельну збіжність, ніж прямий метод, коли після підстановки розкладів у рівняння руху прирівнюються коефіцієнти при однакових степенях лінійно-незалежних функцій. (Це ж саме відмічають Жанг і Мелвілл [179] (1987 р.) для методів в оберненій площині.)

Тому Лукомський і Ганджа [6] (2001 р.) та [120] (2002 р.) побудували загальну реалізацію методу Фур'є розкладів у фізичній площині (перший метод Стокса) на основі явно одержаних співвідношень між Фур'є коефіцієнтами потенціалу швидкості й профілю вільної поверхні — *метод звичайних Фур'є розкладів*. При цьому обрізаний розклад Фур'є для потенціалу швидкості має вигляд, див. формулу (102):

$$R(\theta,\, y) = \xi_0 + \sum_{n=1}^{N} \Big(\xi_n \, T_n \, \mathrm{e}^{n(y+\mathrm{i}\theta)} - \xi_n^* \, T_{-n} \, \mathrm{e}^{-n(y+\mathrm{i}\theta)} \Big),$$

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\Big(\overline{\eta} - \frac{I}{c} \Big), \quad \Phi = -\mathrm{i}c(R - R^*), \quad (154)$$

де коефіцієнти T_n визначаються співвідношенням (100). Обрізаний ряд Фур'є для профілю вільної поверхні такий:

$$\eta(\theta) = \sum_{n=-M}^{M} \eta_n \exp(\mathrm{i}n\theta), \quad \eta_{-n} = \eta_n^*. \quad (155)$$

Розклади (154), (155) підставляються в динамічну та кінематичну граничні умови (75), (76); прирівнюються коефіцієнти при однакових експонентах; одержується система нелінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих коефіцієнтів ξ_n, η_n та фазової швидкості c. Ця система рівнянь розв'язується чисельно методом Ньютона, використовуючи швидке перетворення Фур'є для розрахунку гармонік експоненціальних функцій. Для збіжності методу M має бути в кілька разів більшим за N.[15] Коефіцієнти ξ_n та η_n в загальному випадку комплексні, для *симетричних* же хвиль вони дійсні. Метод дозволив розрахувати з величезною точністю перший максимум фазової швидкості та виявити її перший мінімум [120], обчислення проводились до $N = 250$, $M = 4N$ включно.

Зауважимо, що розклади в фізичній площині мають суттєву перевагу над розкладами в оберненій площині в тому, що сингулярність навколо гребеня в оберненій площині проявляється сильніше. Тому для досягнення тієї ж самої точності методи фізичної площини вимагають врахування значно меншого числа коефіцієнтів розкладу. Так, наприклад, для розрахунку стоксової хвилі з $A = 0.14092$ (99.90% граничної висоти) на глибокій воді числу

[15]Використовувати різне число мод при обрізанні Фур'є рядів для потенціалу швидкості та профілю вільної поверхні запропонував раніше Жуфірія [181] (1987 р.).

гармонік $N = 125$ у розкладі (154) потенціалу в фізичній площині (перший метод Стокса) відповідає $N = 16000$ (!) коефіцієнтів у методі Лонге-Хіггінса, що оснований на розкладі (104) в оберненій площині (другий метод Стокса). Чисельна перевага Фур'є розкладів у фізичній площині очевидна, хоча тут і необхідно додатково шукати апроксимацію для невідомого профілю вільної поверхні, що, звичайно, ускладнює технічну реалізацію методу.

Використання методу звичайних Фур'є розкладів обмежене тією обставиною, що при збільшенні амплітуди хвилі коефіцієнти розкладів (154), (155) спадають з ростом свого номера все повільніше внаслідок загострення гребеня хвилі. Тому для одержання достатньої точності при розрахунку майже найвищих хвиль необхідно враховувати значно більше число коефіцієнтів, ніж це дозволяє навіть найсучасніша комп'ютерна техніка. Зважаючи на це, Лукомський і Ганджа [122] (2003 р.) для випадку нескінченної глибини запропонували новий спектральний метод фізичної площини, оптимізований для ефективного обчислення крутих хвиль, що мають загострену форму, — *метод дробових Фур'є розкладів*. Ідея методу полягає у виборі ефективнішого набору функцій, по яких розкладається потенціал швидкості. Для цього було використано метод Ейлера сумування рядів (див. [37, с. 64]). Одержаний розклад потенціалу швидкості (для глибокої води) має вигляд

$$R(\theta,\, y;\, y_0) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{\big(\exp(-y_0) - \exp(-y - \mathrm{i}\theta)\big)^n}\,, \tag{156}$$

де y_0 — вільний параметр для прискорення збіжності розкладу потенціалу швидкості. При $y_0 = \infty$ розклад (156) перетворюється в звичайний розклад Фур'є (154). При $N = \infty$ розклади (156) і (154) еквівалентні ($h = \infty$) для всіх y_0, проте дробовий розклад (156) при $y_0 \simeq 1$ збігається значно швидше. Тому для одержання однакової чисельної точності дробовий розклад (156) вимагає враховування значно меншого числа коефіцієнтів, ніж звичайний розклад Фур'є (154). Для прискорення збіжності розкладу профілю вільної поверхні використано нелінійне перетворення горизонтального масштабу

$$\theta(\chi;\,\gamma) = \chi - \gamma\sin\chi\,, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{157}$$

що зосереджує чисельний алгоритм на області гребеня, як це робиться в методі Танаки, формула (153). Тоді в розкладі

$$\eta(\chi;\,\gamma) = \sum_{n=-M}^{M} \eta_n^{(\gamma)} \exp(\mathrm{i}n\chi), \quad \eta_{-n}^{(\gamma)} = \eta_n^{(\gamma)}, \tag{158}$$

при $\gamma \to 1$ для одержання тієї ж чисельної точності необхідно врахувати значно менше число коефіцієнтів, ніж у ряді (155). Подальша процедура аналогічна методу звичайних Фур'є розкладів. При безпосередніх розрахунках значення вільних параметрів y_0 і γ методу та співвідношення між числами N і M обираються такими, щоб загальна чисельна похибка була якнайменша. Перевага точності методу дробових Фур'є розкладів над методом звичайних розкладів Фур'є складає від одного до десяти порядків залежно від амплітуди хвилі. Це дозволило суттєво уточнити значення першого мінімуму фазової швидкості, було досягнуто таку ж точність, що дає метод Танаки (див. табл. 4). Проте, розрахунок наступних екстремумів вимагає подальшого вдосконалення методу [122].

Розклади (156), (154) та взагалі будь-яка аналітична функція $R(\theta,\,y) = R(y + \mathrm{i}\theta)$ задовольняють рівняння Лапласа (74) тотожно. Останній факт був використаний Кламондом [60] (1999 р.) і [61] (2003 р.) (відповідно для скінченної та нескінченної глибини) для того, щоб ввести принцип ренормалізації, який дозволяє відтворити потенціал швидкості в усій області потоку за відомим потенціалом на дні (або на будь-якому іншому рівні). Застосувавши ренормалізацію до першого наближення кноїдальних хвиль на мілкій воді (107), Кламонд [61] одержав потенціал швидкості, що в точності збігається з першим доданком ($N = 1$) дробового розкладу (156). Це наближення $N = 1$ Кламонд назвав ренормалізованою апроксимацією кноїдальної хвилі. При цьому навіть перший доданок розкладу (156) виявився точнішим за амплітудну апроксимацію Стокса п'ятого порядку. Кламонд [61] зазначає, що одержані дробові апроксимації відкривають нову парадигму до опису хвиль на воді.

2.3.11. Траєкторії та прискорення частинок. У власній системі відліку хвилі частинки рідини рухаються вздовж ліній струму, що описуються рівняннями (81), — *ейлеровий підхід* до опису руху частинок. Зокрема, поверхневі частинки рухаються вздовж поверхні хвилі. На експерименті ж за рухом частинок спостерігають у лабораторній (нерухомій відносно дна) системі відліку — *лагранжевий підхід* до опису руху частинок. В лінійних хвилях частинки рідини описують еліпси (для глибокої води — кола) з часовим періодом $T = 2\pi\big/\sqrt{\operatorname{th} h}$, рівним часовому періоду хвилі (див. розділ 2.1.9). Хвилі ж скінченної амплітуди спричиняють масоперенос у напрямі свого розповсюдження, отже, траєкторії частинок у лабораторній системі відліку, що описуються рівняннями (80), не є замкненими лініями. Вигляд цих траєкторій для хвилі майже найвищої форми зображено на рис. 12, звідки також добре видно різницю між ейлеровим і лагранжевим підходами до однієї і тієї ж задачі (розрахунок проведено методом дробових Фур'є розкладів, див. розділ 2.3.10). Видно, що в лабораторній системі відліку поверхнева частинка при русі від гребеня до гребеня описує лінію, що за своєю формою нагадує циклоїду. Часовий період руху частинки перевищує часовий період хвилі, притому тим більше, чим амплітуда хвилі ближча до граничної. Для граничної хвилі Стокса

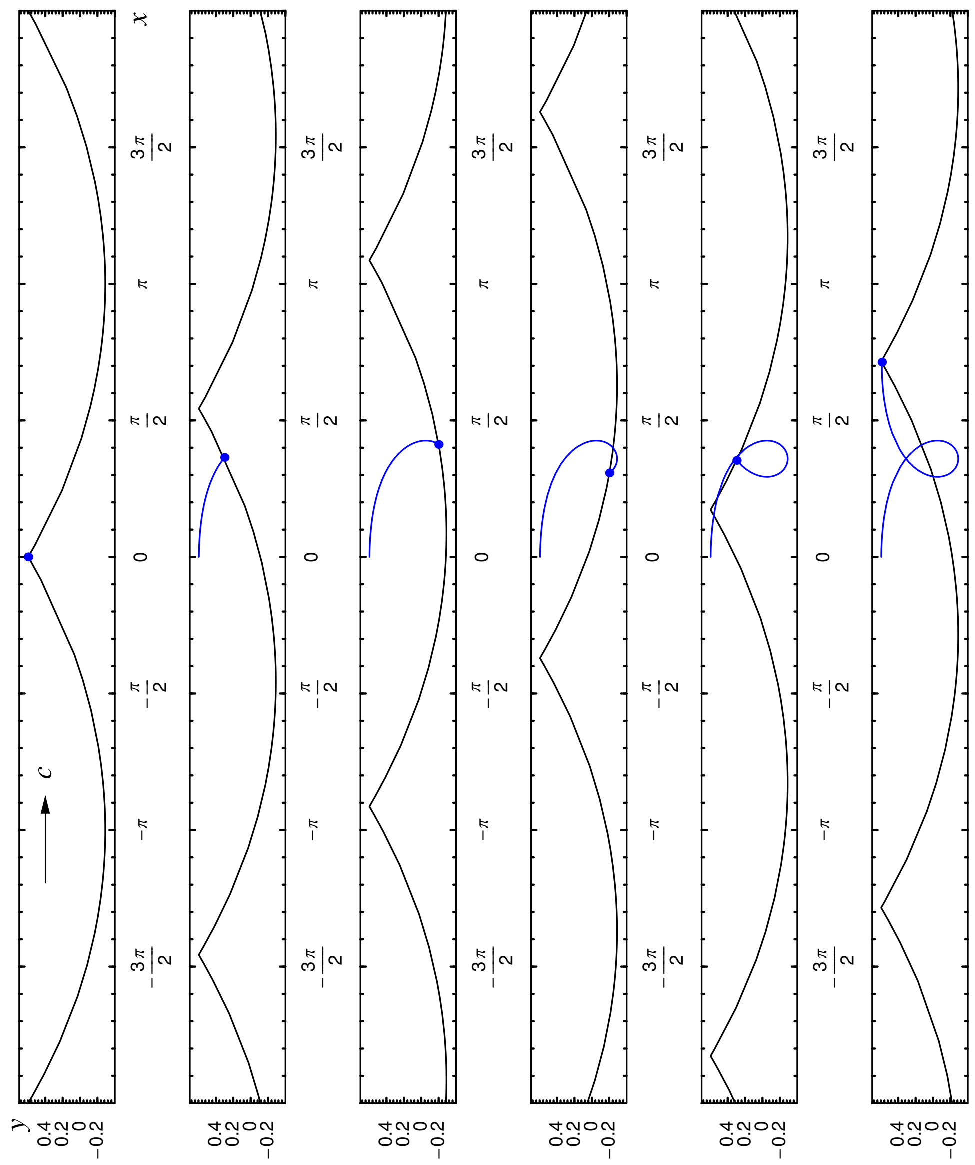


Рис. 12. Траєкторія руху частинки рідини вздовж поверхні стоксової хвилі з $A = 0.14092$ (99.90% граничної висоти) на глибокій воді в лабораторній системі відліку.

з точкою застою на гребені час руху частинки від гребеня до гребеня стає нескінченним, що за аналогією відповідає руху по сепаратрисі математичного маятника, коли для досягнення нестійкого положення рівноваги в найвищий точці необхідний нескінченний час (див., наприклад, Косевич і Ковальов [12, с. 29]).

Детальніший аналіз траєкторій частинок в крутих хвилях та хвилі граничної форми можна знайти в роботах Лонге-Хіггінса [104] (1979 р.) та Срокоза [156] (1981 р.). Відмінностям між ейлеровим і лагранжевим підходами до опису властивостей поверхневих хвиль, включаючи експериментальні дані, присвячено роботу Лонге-Хіггінса [111] (1986 р.), а різноманітним характеристикам масопереносу в стоксових хвилях — його роботи [112] (1987 р.) та [113] (1988 р.) (відповідно для нескінченної та скінченної глибини). Лонге-Хіггінс [105] (1980 р.) також дослідив момент імпульсу руху гравітаційних хвиль, а в роботі [106] (1983 р.) виписав вісім фундаментальних законів збереження для безвихрових гравітаційних хвиль (енергія, імпульс тощо).

Важливою характеристикою руху частинок рідини є також їх прискорення, що у власній системі відліку хвилі визначаються співвідношеннями (82). Для лінійних хвиль, амплітуда яких a нескінченно мала порівняно з довжиною хвилі λ, прискорення, як випливає з формул (49) та (82), пропорційні відношенню a/λ, тобто також нескінченно малі. Для хвилі граничної форми ситуація зовсім інша. Так, з рівняння для ліній струму в комплексній формі (85) та вигляду комплексної швидкості навколо кута (119) випливає, що поблизу гребеня граничної хвилі комплексне прискорення частинок має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}t^2} = \mathfrak{a}_x + \mathrm{i}\mathfrak{a}_y = -\frac{1}{2}\left(\frac{\zeta}{\zeta^*}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{159}$$

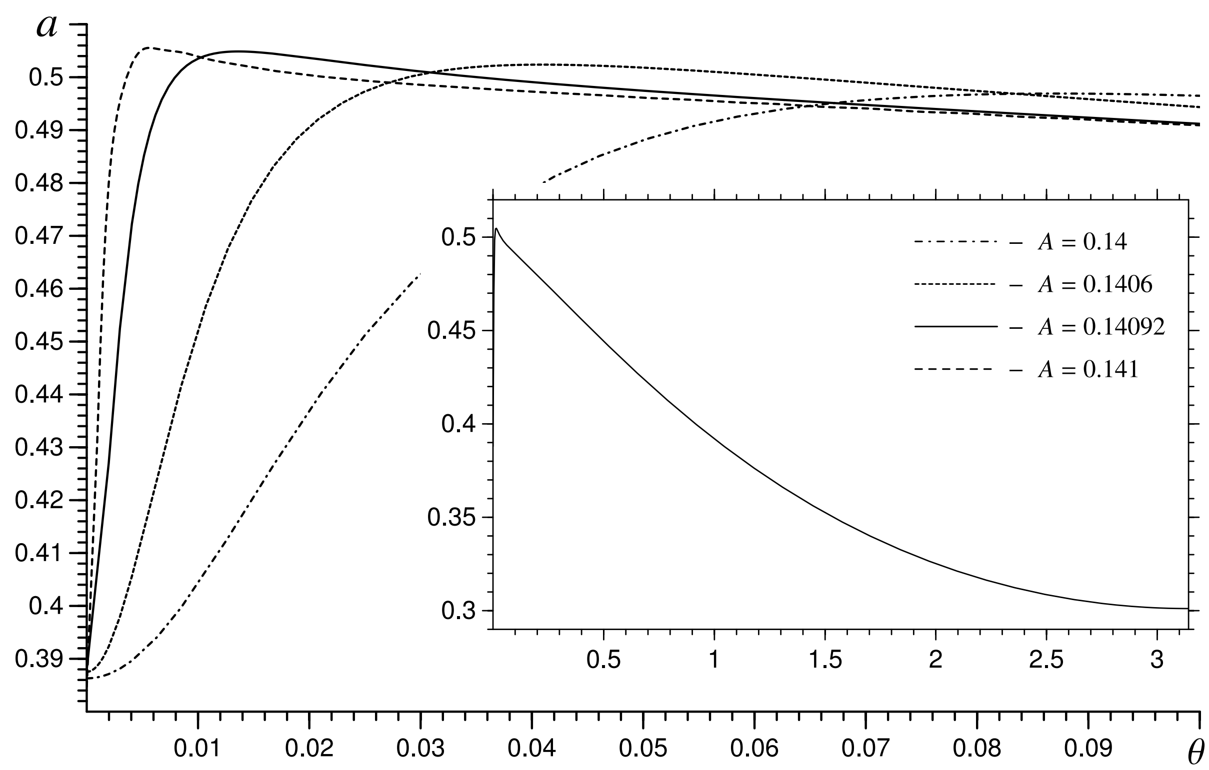


Рис. 13. Прискорення поверхневих частинок поблизу гребеня стоксових хвиль майже граничної форми на глибокій воді, висота хвиль складає 99.25%, 99.67%, 99.90%, 99.95% граничної висоти. Прискорення на гребені прямує до значення $\approx 0.388g$ у власній системі відліку хвилі.

Таким чином, навколо кута прискорення частинок $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2}$ у власній системі відліку хвилі скрізь рівне $\frac{1}{2}g$ (у розмірних змінних) і спрямоване від гребеня хвилі. При цьому кожна частинка рідини рухається так, як вона рухалася би в центральному полі сталої напруженості з центром відштовхування на гребені. Розвинення цієї ідеї дане Лонге-Хіггінсом у роботі [104] (1979 р.), а детальний аналіз прискорень частинок у хвилях майже граничної та граничної форми — у роботі [111] (1986 р.). З віддаленням від гребеня граничної хвилі прискорення частинок спадає.

Цікавим є результат для хвиль майже граничної форми. Лонге-Хіггінс і Фокс [98] (1977 р.), використовуючи асимптотичну теорію майже найвищих хвиль, а пізніше Уілльямс [174] (1985 р.) безпосереднім розрахунком, показали, що на гребені майже найвищих хвиль прискорення частинки складає лише $\approx 0.388g$ (приблизно це ж значення одержали раніше Сасакі і Муракамі [150], 1973 р.). При цьому, як видно з рис. 13, максимальне прискорення поверхневої частинки поблизу гребеня дещо перевищує $0.5g$ (розрахунок проведено методом дробових Фур'є розкладів, див. розділ 2.3.10). Це є в точності прояв того самого ефекту Гіббса, що спостерігається при підході до хвилі граничної форми для максимального кута нахилу вільної поверхні, який при цьому дещо перевищує 30° (див. розділ 2.3.9).

2.3.12. Нестійкості та руйнування хвиль. Майже універсальною властивістю всіх природних течій є їх мінливість. Вона характерна як для земної атмосфери, де втілюється в зміні погоди, так і в океані, зокрема на його поверхні, де виражається в різноманітності й мінливості хвильових явищ. Головною причиною виникнення мінливості в різних за своїми властивостями системах є розповсюдження нестійкостей хвильового руху рідини [34, с. 271]. До цих пір ми розглянули канонічну модель гідродинаміки та її стаціонарні розв'язки у вигляді стоксових хвиль. Проте, в реальних умовах і на експерименті неможливо спостерігати і отримати строго періодичні двовимірні хвилі сталої форми. Причина цьому — нестійкість таких хвиль, що виражає фундаментальну властивість нестійкості природних течій. Розв'язки канонічної моделі є лише відправною точкою для розуміння насправді нестаціонарних процесів розповсюдження хвиль на поверхні рідини.

Нестійкості хвиль відіграють визначальну роль в перекиді та руйнуванні хвиль. Як вже зазначалось, традиційним критерієм руйнування хвиль є умова того, що горизонтальні швидкості частинок рідини на гребенях перевищують швидкість самих гребенів [43, с. 386]. Це відбувається після досягнення хвилі граничної форми з точкою застою на гребені. Проте, відомо, що в реальних умовах хвилі починають руйнуватися при менших амплітудах, ніж має мати хвиля граничної форми [19, с. 105]. Однією з причин цього є саме нестійкості хвиль, внаслідок яких критерій руйнування може виконатися при амплітудах, менших за граничну. Розглянемо відомі нестійкості гравітаційних хвиль.

1. *Модуляційна нестійкість.* Лайтхілл [94] (1965 р.) та Бенжамін і Фейр [44] (1967 р.) показали, що хвилі Стокса малої амплітуди на глибокій воді нестійкі відносно малих часових збурень. Нестійкість проявляється в рості пари бокових компонентів з частотами $\omega_0 \pm \omega'$ та хвильовими векторами $k_0 \pm k'$, що призводить до часової модуляції амплітуди $a = a(x,\ t)$ і фази $\theta = \theta(x,\ t)$ несучої хвилі (ω_0 — частота, k_0 — хвильовий вектор основної хвилі). Цей результат також незалежно одержали Уізем [172] (1967 р.) та Захаров [7] (1966 р.) і [8] (1968 р.). Таким чином, *модуляційна нестійкість* — нестійкість до часової модуляції хвиль, що виражається в *нестаціонарності* їх розповсюдження. Фейр [73] (1967 р.) та Бенжамін [45] (1967 р.) дали експериментальне підтвердження цьому факту. Останній також узагальнив результати для випадку скінченної глибини і показав, що модуляційна нестійкість для хвиль малої амплітуди зникає при $kh \lessapprox 1.36$, тобто в цьому випадку хвилі стають стійкими. Цей же результат незалежно одержав Уізем [172] (1967 р.).

Модуляційна нестійкість не означає, що стоксових хвиль не існує в природі. Вона показує лише те, що ці хвилі не зберігають сталу форму протягом значних часових масштабів (декількох періодів хвиль). Для хвиль малої амплітуди Лейк та ін. [90] (1977 р.) як теоретично, так і експериментально показали, що нестійкі модуляції зростають до деякого максимального значення, а потім спадають, при цьому хвиля повертається до майже немодульованої початкової форми. Такий процес модуляцій-демодуляцій періодично повторюється в часі. При цьому Лейк та ін. [90] експериментально встановили, що в процесі модуляцій-демодуляцій відбувається зсув частоти несучої хвилі в низькочастотну область — *явище зсуву частоти вниз*.

Модуляційну нестійкість без обмеження на малість амплітуди хвиль у випадку глибокої води дослідив Лайтхілл [95] (1967 р.). Він встановив, що для достатньо крутих хвиль (при $A \approx 0.11$) модуляційна нестійкість зникає — *явище рестабілізації*. Лонге-Хіггінс [101] (1978 р.) розрахував модуляційну нестійкість більш точно на основі точних рівнянь руху (всі попередні результати було одержано з наближених еволюційних рівнянь, таких як нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння Захарова тощо). Він встановив, що рестабілізація для модуляцій з $\omega' = 0$ відбувається при $A \approx 0.110$, а повна рестабілізація системи (для всіх ω') — при $A \gtrapprox 0.124$. Пізніше Лонге-Хіггінс [110] (1986 р.) уточнив свої розрахунки і показав, що для вузької смуги частот ω' модуляційна нестійкість має місце і при більших амплітудах, а повністю зникає лише в точці максимуму повної енергії ($A \approx 0.1366$).

Лонге-Хіггінс і Коуклет [97] (1976 р.) розробили контурно-інтегральний метод для розрахунку еволюції нестаціонарних хвиль в послідовні моменти часу — *покроково-часовий метод*. На основі цього методу Лонге-Хіггінс і Коуклет [102] (1978 р.), використавши в якості початкової умови модуляційно збурену стоксову хвилю з $\omega' = \frac{1}{2}\omega_0$ при двох різних амплітудах $A \approx 0.08$ і $A \approx 0.10$, показали, що при цих амплітудах модуляційна нестійкість призводить до перекиду і руйнування хвилі. Мелвілл [132] (1982 р.) надав переконливі експериментальні підтвердження цьому факту, дослідивши діапазон амплітуд $A = 0.05 \div 0.09$.

Детальніший аналіз модуляційної нестійкості гравітаційних хвиль й пов'язаних з нею процесів можна знайти в оглядах Юена і Лейка [178] (1982 р.) та Діаса і Харіфа [69] (1999 р.).

2. *Супергармонічна (гребенева) нестійкість.* Танака [163] (1983 р.) для випадку нескінченної глибини надав чисельні дані того, що після досягнення максимуму повної енергії ($A \approx 0.1366$) гравітаційні хвилі стають нестійкими відносно двовимірних збурень, які мають той же самий період, що і незбурена хвиля. Така нестійкість носить назву *супергармонічної*. Для розрахунку стаціонарних хвиль, що потім досліджувались на стійкість, Танака [163] використав модифікацію метода оберненої площини, запропоновану Ямадой (1957 р.). В оберненій площині u (де поверхня хвилі відображена на коло одиничного радіусу, див. рис. 7) замість рівняння Бернуллі (137) розглядається рівняння (142), що виражає зв'язок між модулем швидкості q й кутом нахилу ϑ вільної поверхні. Розв'язок будується не для функції $\zeta(u)$, як у другому методі Стокса (133) в оберненій площині u, а для функції $\Theta(u) = \vartheta + \mathtt{i}\ln q$. Коефіцієнти розкладу шукаються методом колокацій. Визначальна ідея Танаки — це використати додаткове нелінійне перетворення змінних

$$\xi = \frac{u+\alpha}{1+\alpha\, u}, \quad -1 < \alpha \leqslant 0, \tag{160}$$

для згущення точок колокацій поблизу гребеня хвилі, що кардинально підвищило точність чисельних розв'язків і дозволило вирішувати питання про їх стійкість з достатньою точністю.

Можливість існування супергармонічної нестійкості, знайденої Танакою, раніше припустив Лонге-Хіггінс [100] (1978 р.), проте недостатня точність його розрахунків привела до неправильного висновку, що нестійкість з'являється в точці максимуму фазової швидкості хвилі ($A \approx 0.13875$). Результат Танаки [163] викликав гострі суперечки, оскільки в точці максимуму енергії (як і в усіх інших точках) не було знайдено біфуркації до нового розв'язку, як цього вимагає існування супергармонічної нестійкості (детальний пошук точок біфуркацій раніше провели Чен і Сеффмен [58], 1980 р.). Так, Лонге-Хіггінс [108] (1984 р.) аналітично показав, що біфуркація до розв'язку з тим же самим періодом, якщо вона існує, можлива лише в точках екстремуму фазової швидкості хвилі. Це примусило Танаку [164] (1985 р.) детальніше переглянути свої розрахунки і підтвердити, що в максимумі фазової швидкості немає зміни нестійкості, а значить і біфуркації до нового розв'язку. При цьому він показав, що в максимумі повної енергії біфуркація таки відбувається, але це лише тривіальна біфуркація зсуву фази, що відповідає трансляційній симетрії періодичної хвилі. Нарешті, використовуючи гамільтонівський формалізм, Сеффмен [149] (1985 р.) строго довів правильність висновків Танаки. Більш того, Сеффмен показав, що зміна стійкості розв'язку (відносно збурень того ж самого періоду) відбувається в кожному екстремумі повної енергії хвилі, але при цьому немає біфуркації до нового розв'язку окрім простого зсуву фаз. Жуфірія і Сеффмен [180] (1986 р.) узагальнили цей результат на випадок скінченної глибини.

Ці результати означають, що, хоча супергармонічна нестійкість і має місце, при цьому не відбувається неперервного переходу (біфуркації) до іншого розв'язку, коли в точці виникнення нестійкості новий розв'язок та початковий (нестійкий) розв'язок відрізняються на нескінченно малу величину — *м'яке збудження*. Проте, не виключається можливість *жорсткого збудження*, коли в точці виникнення нестійкості новий розв'язок відмінний від початкового одразу на скінченну величину. Питання про можливість такого жорсткого збудження внаслідок супергармонічної нестійкості стоксових хвиль залишається відкритим, і в разі позитивної відповіді це могло б дати пояснення наступним результатам.

Так, Джилліанс [83] (1989 р.) дослідив форму супергармонічних нестійкостей стоксових хвиль і показав, що вони призводять до перекиду і руйнування хвиль. Було зроблене припущення, що руйнування хвилі — чисто локальне явище поблизу гребеня хвилі і відбувається незалежно від потоку рідини в решті хвилі. Раніше попередні результати з цього питання одержали Лонге-Хіггінс і Коуклет [102] (1978 р.). Маючи на увазі цю ідею, Лонге-Хіггінс і Клівер [114] і Лонге-Хіггінс та ін. [115] (1994 р.) на основі асимптотичної теорії майже найвищих хвиль показали, що супергармонічна нестійкість призводить до нестійкості гребенів майже найвищих стоксових хвиль — *гребенева нестійкість*. Лонге-Хіггінс і Танака [118] (1997 р.) на основі чисельних розрахунків за допомогою метода Танаки [163] підтвердили те, що супергармонічні нестійкості стоксових хвиль є насправді гребеневими нестійкостями. Нарешті, Лонге-Хіггінс і Доммермас [117] (1997 р.) показали, що гребеневі нестійкості призводять до (*i*) перекиду і руйнування хвилі або (*ii*) неперервного переходу до прогресивної хвилі з меншою амплітудою з наступним поверненням до хвилі майже початкової амплітуди. Останній результат породжує нове питання: *в чому причина цього перехідного процесу*? Відповіді на нього досі немає, хоча можна висунути припущення, що знайдене явище викликане появою в чисельній схемі Лонге-Хіггінса і Доммермаса нерегулярних потоків (див. розділ 2.3.13).

3. *Субгармонічна нестійкість.* Це нестійкість відносно двовимірних збурень, що мають кратну довжину $m\lambda$ до довжини незбуреної хвилі λ, m — натуральне число. Лонге-Хіггінс [101] (1978 р.) у випадку нескінченної глибини показав, що такі нестійкості виникають для достатньо крутих хвиль ($A \approx 0.13$). Сеффмен [145] (1980 р.) розрахував пороги субгармонічних нестійкостей значно точніше, одержавши, що найнижча нестійкість $m = 2$ виникає при

Таблиця 5

Пороги субгармонічних нестійкостей стоксових хвиль
(нескінченна глибина)

m	A	η_1	A (Лонге-Хіггінс, 1986 р.)	A (Сеффмен, 1980 р.)
2	0.128903097	0.178018951	0.128903	0.1289
3	0.128815957	0.177970433	0.128816	0.1288
4	0.128703914	0.177907398	0.128704	0.1287
5	0.128612610	0.177855495		0.1286
6	0.128540915	0.177814405	0.128541	
7	0.128484088	0.177781629		
8	0.128438258	0.177755063	0.128438	
9	0.128400642	0.177733170		
10	0.128369273	0.177714852		0.1284

$A \approx 0.1289$, нестійкість $m = 3$ — при $A \approx 0.1288$ і так далі. Сеффмен провів розрахунки до $m = 150$ включно, одержавши для цього випадку поріг нестійкості $A \approx 0.1280$. Лонге-Хіггінс [109] (1985 р.) провів ще точніший аналіз субгармонічних нестійкостей порядку $m = 2$ і $m = 3$, а пізніше (Лонге-Хіггінс [110], 1986 р.) для граничної точки $m = \infty$ одержав $A \approx 0.128035$, розрахувавши також пороги нестійкостей $m = 2, 3, 4, 6, 8$. Лонге-Хіггінс [110] також встановив, що субгармонічна нестійкість (як і модуляційна) повністю зникає в точці максимуму повної енергії ($A \approx 0.1366$). Точні значення порогів субгармонічної нестійкості до $m = 10$ включно, одержані на основі методу звичайних Фур'є розкладів (див. розділ 2.3.10), наведено в табл. 5.

Чен і Сеффмен [58] (1980 р.) у випадку нескінченної глибини дослідили біфуркації, що виникають внаслідок субгармонічних нестійкостей стоксових хвиль. Вони надали чисельне свідоцтво того, що в точках нестійкостей $m = 2$ і $m = 3$ виникають нові симетричні стаціонарні розв'язки канонічної задачі з періодами, що в m разів більші за період нестійкої стоксової хвилі, — *субгармонічні хвилі*. Ці нові субгармонічні розв'язки характеризуються тим, що мають гребені двох різних висот. З ростом амплітуди вищі гребені загострюються, а нижчі залишаються округлої форми. Субгармонічні хвилі граничної форми з $m = 2$, $m = 3$ і $m = 4$ розрахували Ольфе і Роттмен [136] (1980 р.) за допомогою метода Мічелла. Вони підтвердили те, що в граничному випадку вищі гребені утворюють гострий 120° кут, а нижчі гребені мають округлу форму. Ванден-Броуек [171] (1983 р.) розрахував субгармонічні хвилі порядку $m = 2$ для кількох випадків скінченної глибини. Сіммен і Сеффмен [154] (1985 р.) уточнили розрахунки субгармонічних хвиль з $m = 2$, $m = 3$ і $m = 4$ для глибокої води, а також розрахували субгармонічні хвилі за наявності додаткової сталої завихреності.

Усі субгармонічні біфуркації стоксових хвиль можуть приводити лише до *симетричних* субгармонічних розв'язків — це строго довів Лонге-Хіггінс [109] (1985 р.). Жуфірія [181] (1987 р.) у випадку нескінченної глибини показав, що *несиметричні* субгармонічні хвилі виникають внаслідок біфуркацій руйнування симетрії вже субгармонічних хвиль, і розрахував профілі цих несиметричних хвиль. Жуфірія довів, що несиметричні хвилі існують лише при $m \geqslant 6$. Жуфірія [182] (1987 р.) узагальнив ці результати на випадок скінченної глибини.

Математичну теорію супер- і субгармонічних біфуркацій розробили Буффоні та ін. [50, 51] (2002 р.). Використовуючи теорію псевдо-диференціальних операторів, вони дали строге математичне обґрунтування існування нескінченного числа (i) супергармонічних біфуркацій при підході до хвилі граничної висоти, хоча і не встановили, чи ці біфуркації призводять до існування нових розв'язків; (*ii*) субгармонічних біфуркацій при достатньо великих амплітудах, що призводять до утворення розв'язків з кратними періодами. Було встановлено, що виникнення субгармонічних біфуркацій є неминучим наслідком існування граничної хвилі Стокса [51, с. 245]. Раніше Баєзенс і Маккай [42] (1992 р.) дали інтерпретацію біфуркацій стоксових хвиль з точки зору загальної теорії гамільтонівських динамічних систем.

Субгармонічні хвилі надають просту модель для пояснення утворення штормових хвиль на морі. Ці хвилі характеризуються тим, що крутому загостреному гребеню, який перекидається, передує певне число округлих гребенів значно меншої амплітуди.

4. *Тривимірна нестійкість.* Маклін та ін. [126] (1981 р.) і Маклін [127] (1982 р.) на основі точних рівнянь руху для випадку нескінченної глибини показали, що хвилі Стокса при всіх амплітудах нестійкі до тривимірних збурень, які в загальному випадку мають такий вигляд (як наслідок теореми Флоке лінійної теорії стійкості):

$$\widetilde{\eta}(\theta, z, t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\theta + qz)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{\eta}_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + c.c., \tag{161}$$

де $\widetilde{\eta}(\theta, z, t)$ — варіація стаціонарного профілю $\eta(\theta)$, *c.c.* — комплексно спряжене. Було встановлено, що існують два суттєво різні класи тривимірних нестійкостей. Область нестійкості *класу I* симетрична відносно точки ($p = 0$; $q = 0$) на площині (p; q). Область же нестійкості *класу II* симетрична відносно точки ($p = \frac{1}{2}$; $q = 0$). Маклін [127] вказав, що для лінійних хвиль обидва класи нестійкостей можна інтерпретувати як резонансну взаємодію між цугом несучих хвиль з хвильовим вектором $\boldsymbol{k_0} = (1,\ 0)$ і частотою $\omega_0 = |\boldsymbol{k_0}|^{\frac{1}{2}}$ та двома хвилями на побічних частотах $\omega_i = |\boldsymbol{k_i}|^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$.

При цьому умови резонансів такі:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k_1} + \boldsymbol{k_2} &= N\boldsymbol{k_0}, \\ \omega_1 + \omega_2 &= N\omega_0. \end{aligned} \tag{162}$$

Нестійкостям *класу I* відповідає $\boldsymbol{k_1} = (l+p,\ q)$, $\boldsymbol{k_2} = (l-p,\ -q)$, $N = 2l$, $l \in \mathbb{Z}^+$; нестійкостям *класу II* відповідає $\boldsymbol{k_1} = (l+p,\ q)$, $\boldsymbol{k_2} = (l+1-p,\ -q)$, $N = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}^+$. Натуральне число l називається *модою* нестійкості. Існування резонансу найнижчого порядку $N = 2$ раніше встановив Філліпс [139] (1960 р.), а на можливість вищих резонансів вказав Захаров [8] (1968 р.). Зауважимо також, що для хвиль малої амплітуди тривимірні нестійкості класу I було одержано раніше з модельних еволюційних рівнянь: нелінійного рівняння Шредінгера (Захаров [8], 1968 р.) та рівняння Захарова (Кроуфорд та ін. [64], 1981 р.).

Виявилось, що всі три види розглянутих вище нестійкостей є насправді частинними випадками найнижчих мод $l = 1$ тривимірних нестійкостей класу I і II. Так, Маклін та ін. [126] показали, що модуляційна нестійкість є частинним випадком $q = 0$ нестійкості класу I ($l = 1$). При цьому максимальний інкремент нестійкості класу I при всіх амплітудах лежить саме на вісі $q = 0$, тобто нестійкість класу I є переважно двовимірною, хоча і включає ненульові значення q, але з меншими інкрементами. Розрахунки Макліна та ін. [126] (1981 р.) показують, що нестійкість класу I зникає при $A \approx 0.124$, хоча більш пізні розрахунки Лонге-Хіггінса [110] (1986 р.) свідчать про те, що це відбувається при більшій амплітуді в точці максимуму повної енергії ($A \approx 0.1366$). Що стосується нестійкості класу II ($l = 1$), то її максимальний інкремент завжди лежить на вісі $p = \frac{1}{2}$, причому $q \neq 0$. Таким чином, нестійкість класу II суттєво тривимірна. При малих і помірних амплітудах вісь $q = 0$ взагалі знаходиться поза межами області нестійкості класу

II. При $A \approx 0.129$ область нестійкості класу II дотикається до вісі $q = 0$ в точці $p = \frac{1}{2}$, що в точності відповідає появі субгармонічної нестійкості подвоєння періоду, знайденої вперше Лонге-Хіггінсом [101] (1978 р.). При збільшенні амплітуди ділянка перетину області нестійкості класу II з віссю $q = 0$ розширюється. Проте, максимальний інкремент нестійкості при цьому має місце при $q \neq 0$, тому тривимірна нестійкість переважає субгармонічну.

Якщо порівняти максимальні інкременти нестійкостей класу I та II ($l = 1$), то нестійкість класу I переважає при малих амплітудах, а, починаючи з $A \approx 0.10$, переважає нестійкість класу II. Таким чином, при $A \lesssim 0.10$ нестійкості стоксових хвиль переважно двовимірні, а при $A \gtrsim 0.10$ — переважно тривимірні. Цей факт експериментально підтвердив Мелвілл [132] (1982 р.), одержавши поріг переходу від двовимірних до тривимірних нестійкостей при $A \approx 0.098$ — майже той самий, що дає теорія. При цьому нестійкості в обох випадках призводили до кінцевого перекиду хвиль. Експерименти Мелвілла покривають діапазон амплітуд $A = 0.05 \div 0.102$. Су та ін. [161] (1982 р.) також надали експериментальні спостереження того, що при $A \approx 0.10$ початково двовимірні хвилі набували тривимірних модуляцій, які призводили до перекиду і руйнування гребенів з наступним утворенням двовимірних хвиль значно (приблизно вдвічі) меншої амплітуди.

Точність розрахунків дозволила Макліну [127] дослідити на стійкість стоксові хвилі до $A \approx 0.13$. Вищі амплітуди розглянули Харіф і Рамамонджіарісоа [85] (1988 р.) та [86] (1990 р.). Було встановлено, що при збільшенні амплітуди ділянка перетину області нестійкості класу II ($l = 1$) з віссю $q = 0$ розширюється до тих пір, доки при $A \approx 0.1366$ одночасно досягає точок ($p = 0$; $q = 0$) і ($p = 1$; $q = 0$). Ціле значення $p = 1$ відповідає супергармонічній нестійкості, а факт виникнення цієї нестійкості в точці максимуму повної енергії в точності збігається з розрахунками Танаки [163] (1983 р.). Таким чином, супергармонічна нестійкість є також частинним випадком нестійкості класу II ($l = 1$). При подальшому збільшенні амплітуди розширення області нестійкості класу II за межі точки ($p = 1$; $q = 0$) не відбувається. При цьому з'ясувалося, що при $A \gtrsim 0.139$ інкремент супергармонічної нестійкості починає переважати інкременти всіх інших нестійкостей, тобто для майже граничних амплітуд нестійкість стоксових хвиль знову стає переважно двовимірною.

Харіф і Рамамонджіарісоа [85] і [86] також розрахували нестійкості класу I та II з модою $l = 2$. Виявилось, що їм відповідають супергармонічні нестійкості вищого порядку при $A \approx 0.113$ та $A \approx 0.1356$ відповідно. Існування цих нестійкостей передбачили раніше Маккай і Сеффмен [124] (1986 р.), вивівши на основі теорії гамільтонівських систем необхідну умову виникнення спектральної нестійкості гравітаційних та гравітаційно-капілярних хвиль.

Тривимірні нестійкості призводять до утворення нових тривимірних стаціонарних розв'язків (подібно до двовимірних субгармонічних нестійкостей). Сеффмен і Юен [146] та [147] (1980 р.) розрахували такі розв'язки для малих амплітуд на основі рівняння Захарова, а Мейрон та ін. [131] (1982 р.) й Чен і Сеффмен [59] (1985 р.) — для більших амплітуд на основі точних рівнянь руху. Експериментальне дослідження стаціонарних тривимірних хвиль провів Су [162] (1982 р.). Детальнішому аналізу тривимірних нестійкостей гравітаційних хвиль й стаціонарних тривимірних структур, що при цьому утворюються, присвячено огляди Сеффмена і Юена [148] (1985 р.) та Діаса і Харіфа [69] (1999 р.).

Усі викладені вище результати щодо тривимірних нестійкостей стосуються випадку нескінченної глибини. Результатів для скінченної глибини значно менше, і всі вони відповідають найнижчій моді $l = 1$. Так, Браянт [49] (1978 р.) дослідив нестійкості класу I для малих і помірних амплітуд. Маклін [128] (1982 р.) на основі точних рівнянь руху розглянув три випадки: $d = 2$, $d = 1$ і $d = 0.5$ (d — незбурена глибина) для діапазону амплітуд від 0 до $\approx 90\%$ від граничних значень. З'ясувалось, що при досліджуваних амплітудах випадок $d = 2$ подібний до випадку нескінченної глибини. Головна відмінність полягає в тому, що максимальний інкремент нестійкості класу I має місце при $q \neq 0$, тобто навіть для хвиль малої амплітуди нестійкість переважно тривимірна (в межах слабонелінійної теорії це раніше встановили Захаров і Харітонов [9] та Бенні і Розкес [46], 1970 р.). Нестійкість класу I стає переважно двовимірною (коли максимальний інкремент має місце при $q = 0$) після рестабілізації, проте нестійкість хвиль все одно залишається переважно тривимірною, оскільки при амплітуді рестабілізації нестійкість класу II вже має більший інкремент (при малих амплітудах максимальний інкремент нестійкості класу I переважає).

Випадок $d = 1$ відрізняється тим, що хвилі малої амплітуди стійкі відносно двовимірних модуляцій, це підтверджує результат Уізема [172] того, що модуляційна нестійкість для хвиль малої амплітуди зникає при $kh \approx 1.36$. Проте хвилі залишаються нестійкими відносно тривимірних модуляцій класу I і II. Маклін [128] також встановив, що у випадку $d = 1$ двовимірна модуляційна нестійкість таки з'являється, але при достатньо великих амплітудах, хоча при цьому тривимірні нестійкості все одно переважають. У випадку $d = 0.5$ при малих амплітудах знову переважають двовимірні нестійкості класу I, але це вже не довгохвильові модуляції при малих p (як це відбувається при модуляційній нестійкості), а короткохвильові з $p > 1$. При збільшенні амплітуди переважаючими стають тривимірні нестійкості.

Випадок $d = 2$ для майже найвищих хвиль (які не вдалося з достатньою точністю розрахувати Макліну) дослідили Француз і Харіф [75] (2003 р.). Було виявлено суттєві відмінності порівняно з випадком нескінченної глибини. При збільшенні амплітуди після виникнення субгармонічної нестійкості $\big($перетин області нестійкості класу II з віссю $q = 0$ в точці $p = \frac{1}{2}\big)$ області нестійкості класу I і класу II перетинаються (подібний ефект для гравітаційно-капілярних хвиль на глибокій воді раніше одержали Жанг і Мелвілл [179], 1987 р.). При подальшому збільшенні амплітуди область нестійкості класу I зменшується і стискається в точку ($p = 1$; $q = 0$), при досягненні якої повністю зникає. При цьому область нестійкості класу II повністю займає ділянку висі $q = 0$ від $p = 0$ до $p = 1$, що обумовлює виникнення супергармонічної нестійкості. Це відбувається при амплітуді, яка в точності відповідає максимуму повної енергії, що підтверджує аналітичний результат Жуфірії і Сеффмена [180] (1986 р.).

Таким чином, знайдені суттєві відмінності між нестійкостями хвиль у випадках нескінченної і скінченної глибини, й останній вимагає подальшого дослідження. Також нез'ясованим залишається питання про характер субгармонічних нестійкостей вищого порядку $m > 2$, адже зв'язок субгармонічних нестійкостей з тривимірними нестійкостями встановлено лише для випадку $m = 2$.

Руйнування хвиль. Окреслені результати, одержані завдяки вивченню нестійкостей розв'язків канонічної моделі, обумовили значний прогрес у розумінні таких складних фізичних процесів як перекид і руйнування хвиль, але все ж таки їх ще недостатньо для повного пояснення експериментальних даних та спостережень в реальних умовах. Різноманітним питанням руйнування хвиль присвячено чимало оглядових і оригінальних статей, зокрема Перегрін [138] (1983 р.), Бонмарін [48] (1989 р.), Баннер і Перегрін [43] (1993 р.), Мелвілл [133] (1996 р.), Данкен [71] (2001 р.). Так, розрізняють два основних види перекиду хвиль — "пірнаючий бурун" і "сковзаючий бурун" [138, с. 149]. *Пірнаючий бурун*[16] характеризується тим, що переважна частина переднього фронту хвилі перекидається, утворюючи потужний чітко виражений струмінь, який падає поблизу основи хвилі, викликаючи значний сплеск. У *сковзаючому буруні*[17] на гребені утворюється біла піна, що сковзає вниз по передньому фронту хвилі. Спостереження показують, що і в останньому випадку утворенню піни передує поява локалізованого біля гребеня струменя в напрямі розповсюдження хвилі. Саме пояснення фізичного механізму утворення цього специфічного струменя на початковій стадії перекиду хвилі й складає головну загадку процесу руйнування хвиль (Перегрін [137], 1981 р.). Частинки рідини в цьому струмені набувають величезних прискорень, що сягають величини $5g$ [43, с. 386]. В обох випадках руйнування хвилі супроводжується проникненням у воду повітря у вигляді численних бульбашок, а також утворенням бриз та сплесків, які й формують відомі білі баранці на гребенях хвиль, що перекидаються.

2.3.13. Нерегулярні хвилі. Лукомський та ін. [121] (2002 р.) (нескінченна глибина), [76] (2002 р.) (довільна глибина) та [78] (2003 р.) (субгармонічні хвилі) надали чисельне свідоцтво існування нового сімейства *наближених* розв'язків канонічної моделі гідродинаміки, що відрізняються від відомих стоксових хвиль. Було знайдено, що ці нові розв'язки описують потоки з особливою точкою всередині області, що зайнята рідиною, та розривними лініями струму поблизу гребеня хвилі, при цьому горизонтальні швидкості частинок рідини навколо гребеня перевищують швид-

[16] plunging breaker (англ.)
[17] spilling breaker (англ.)

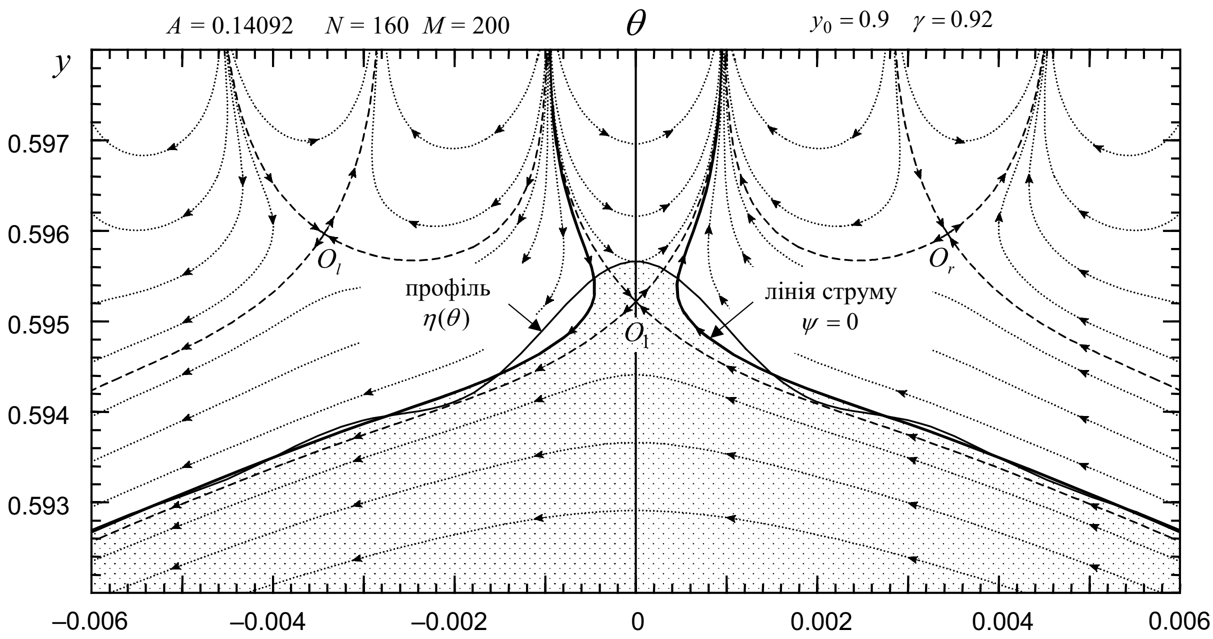


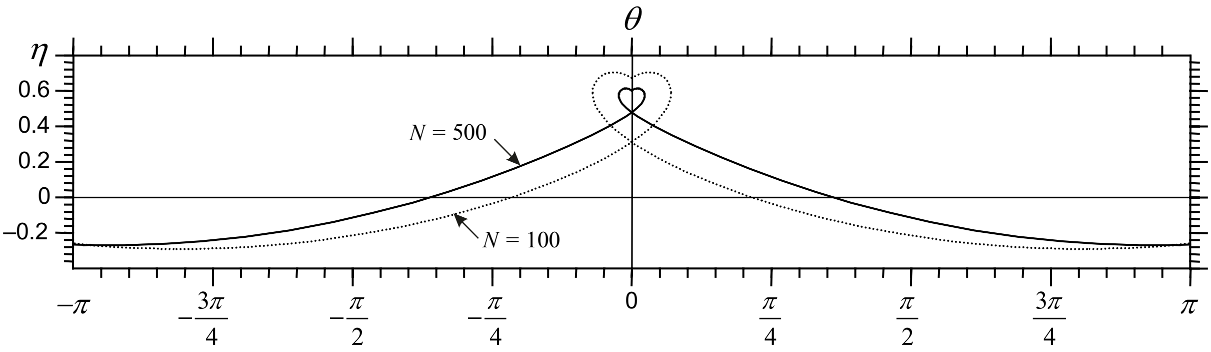
Рис. 14. Профіль і лінії струму нерегулярного потоку (разом з його аналітичним продовженням за межі області, зайнятої рідиною) поблизу гребеня ($A = 0.14092$, нескінченна глибина).

кість самого гребеня. Внаслідок цього такі хвилі та потоки було названо “*нерегулярними*” [121]. Амплітуда нерегулярних хвиль менша за амплітуду граничної хвилі Стокса. Приклад нерегулярного потоку поблизу гребеня хвилі зображено на рис. 14 (розрахунок проведено методом дробових Фур’є розкладів, див. розділ 2.3.10). Особлива точка O_1 знаходиться всередині області потоку, на відміну від регулярного потоку в стоксових хвилях, де особлива точка знаходиться за межами області, що зайнята рідиною. Особливі точки O_r і O_l — додаткові особливі точки, існування яких передбачив Грант [80] (1973 р.) (див. розділ 2.3.6). Осциляції профілю хвилі $\eta(\theta)$ поблизу гребеня та його відхилення від розривної лінії струму $\psi = 0$, що також має описувати вільну поверхню, є наслідком феномену Гіббса (див. рис. 10), коли розривна функція або функція з розривними похідними апроксимуються обрізаним набором неперервних функцій.

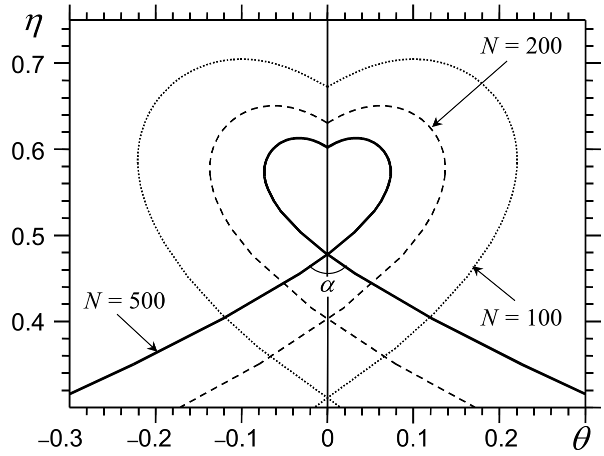
Існування наближених розв'язків у вигляді нерегулярних хвиль підтвердили Дубіан і Харіф [77] (2002 р.) методом Лонге-Хіггінса оберненої площини та Кламонд [61] (2003 р.), використовуючи свою ренормалізовану апроксимацію кноїдальної хвилі. Утворення розривних ліній струму в нерегулярних хвилях нагадує виникнення вертикальних струменів з загостреними кінцями в стоячих гравітаційних хвилях при переході за межі граничної висоти, як нещодавно показав Лонге-Хіггінс [119] (2001 р.). Потік, де вільна поверхня розривна, одержав також Дженкінс [82] (1994 р.) при побудові стаціонарної (але несиметричної) апроксимації хвилі, що руйнується.

Подальші дослідження (Лукомський і Ганджа [122], 2003 р.) показали, що особлива точка O_1 пропорційно до росту чисельної точності наближається до гребеня хвилі. При цьому область, де відбуваються осциляції профілю (феномен Гіббса), все більше локалізується навколо гребеня, і швидкість частинок рідини на гребені зменшується. На основі цих спостережень Лукомський і Ганджа [122] висунули припущення, що в граничному випадку, коли чисельна похибка прямує до нуля, особлива точка має піднятись до гребеня хвилі, швидкість частинки рідини на гребені має зменшитись до нуля, а сам гребінь утворити гострий кут подібно до граничної хвилі Стокса. При цьому профіль хвилі збігатиметься з лінією струму $\psi = 0$ на всій вільній поверхні.

Таким чином, знайдені *наближені* нерегулярні розв'язки скоріш за все відповідають сімейству *гостро-гребеневих* хвиль, що за своїми властивостями подібні до граничної хвилі Стокса, але мають *меншу амплітуду*. На даний момент не можна встановити, чи такі розв'язки існують при малих амплітудах, але для майже найвищих хвиль *при кожній амплітуді* схоже існує *два розв'язки* канонічної моделі: *регулярна стоксова хвиля* з округлим гребенем



N	A	α
100	0.1577	111.68°
200	0.1456	109.05°
300	0.1421	107.96°
400	0.1407	107.35°
500	0.1401	106.98°



$N = 500$: $b_1 \gtrsim 0.05$; $b_2 \gtrsim 0.02$; $b_3 \gtrsim 0.01$; …; $b_n < 0$

Рис. 15. Нерегулярний розв’язок, знайдений методом Мічелла.

та *гостро-гребенева хвиля*, що наближено описується знайденими нерегулярними потоками (Лукомський та ін. [123], 2004 р.). Це підтверджує припущення, висунуте в розділі 2.3.5 при аналізі квадратичної нелінійності рівняння Бернуллі.

На те, що можуть існувати гостро-гребеневі хвилі, відмінні від граничної хвилі Стокса, вказують також розрахунки, проведені методом Мічелла (див. розділ 2.3.7), де особливість 120° на гребені хвилі враховується *a priori*. Окрім відомих розв’язків, що описують граничну хвилю Стокса (див. рис. 8) та граничні субгармонічні хвилі, знайдено ряд нових раніше невідомих розв’язків. Один з таких розв’язків зображено на рис. 15. Гребінь наведеного розв’язку утворює серцеподібну бульбашку, яка зменшується з ростом чисельної точності (збільшення N). При цьому амплітудуда хвилі A спадає і вже при $N = 400$ стає меншою за амплітуду граничної хвилі Стокса. Кут α також зменшується з ростом точності і прямує до меншого значення, ніж 120°. Можна зробити припущення, що при $N \to \infty$ бульбашка стиснеться в єдину точку, і знайдений розв'язок описуватиме гостро-гребеневу хвилю з амплітудою, меншою за граничну хвилю Стокса, і кутом на гребені, можливо, меншим за 120°. Остаточне і строге обґрунтування цієї гіпотези, а також природа нерегулярних розв'язків, вимагають подальшого дослідження.

2.3.14. Гравітаційно-капілярні хвилі. На завершення зробимо зауваження щодо впливу поверхневого натягу на розглянуту вище теорію гравітаційних хвиль. Як було зазначено в розділі 2.2.6, поверхневий натяг відіграє суттєву роль для ефектів на відстанях до $0.01 \div 0.1$ *м*. Тому, хоча для процесу розповсюдження метрових і довших хвиль поверхневий натяг в цілому не суттєвий, для локальних явищ, таких як, наприклад, формування гостро-гребеневих хвиль, він стає визначальним. Так, для гравітаційно-капілярних хвиль (слабкий вплив поверхневого натягу) замість 120° кута гребінь граничної хвилі має бульбашкоподібну форму, як показали Дубіан і Харіф [65] (1996 р.), проте цей ефект носить локальний характер, і гребінь в цілому має загострену форму. Це є наслідком присутності другої похідної профілю вільної поверхні в граничній умові, див. формулу (71), що згладжує всі особливості. Детальне вивчення гравітаційно-капілярних та капілярних хвиль лежить за межами обсягу даного огляду, стан досліджень цієї проблеми добре описали Дубіан і Харіф [66] (1997 р.) (нескінченна глибина) і Дубіан та ін. [67] (2000 р.) (скінченна глибина). Більш ранні результати розглянуті в огляді Шварца і Фентона [153] (1982 р.). Зауважимо лише, що задача про капілярні хвилі (без врахування сили тяжіння) має точний розв'язок в термінах еліптичних функцій, як встановили Креппер [63] (1957 р.) (нескінченна глибина) і Кіннерслі [87] (1976 р.) (скінченна глибина).

З зазначеного зрозуміло, що правильний опис локальної поведінки поблизу гребенів хвиль граничної та майже граничної амплітуди вимагає врахування поверхневого натягу, і задача про 120° кут у хвилі граничної форми носить скоріше академічний характер. Тим не менше, навіть ця задача має ще ряд невирішених питань, на котрих і було зосереджено даний огляд, і без розуміння яких неможливо з впевненістю аналізувати більш складні моделі розповсюдження хвиль на поверхні рідини.

Висновки

У даному огляді розглянуто канонічну (найпростішу) модель гідродинаміки для вивчення двовимірних прогресивних періодичних гравітаційних (що розповсюджуються лише під дією сили тяжіння) хвиль сталої форми на поверхні рідини довільної сталої глибини. Наближення канонічної моделі такі: (*i*) рідина вважається ідеальною (нехтуються ефекти в'язкості й теплопровідності) і нестисливою; (*ii*) рух рідини потенціальний (безвихровий); (*iii*) атмосферний тиск вважається сталим на всій вільній поверхні та нехтується рух повітря над рідиною; (*iv*) нехтується вплив поверхневого натягу та оточуючого середовища.

В першому підрозділі в межах наближень канонічної моделі одержані рівняння руху гравітаційних хвиль. Це є рівняння Лапласа в усій області, що зайнята рідиною; граничні умови того, що дно і вільна поверхня є лініями струму (остання носить назву кінематичної граничної умови); динамічна гранична умова, що виражає сталість тиску на вільний поверхні, — рівняння Бернуллі. Визначенню підлягають потенціал швидкості, профіль вільної поверхні та фазова швидкість хвилі. Параметрами задачі є амплітуда (вертикальна відстань від впадини до гребеня) і довжина хвилі, а також глибина рідини. Задача ускладнюється такими факторами: (1) рівняння Бернуллі суттєво нелінійне (квадратичне за швидкістю), причому в загальному випадку немає малого параметра; (2) граничні умови на вільній поверхні задані на невідомій границі. Задача не має точного розв'язку в відомих функціях. На завершення розглянуто лінійне наближення, коли амплітуда хвиль нескінченно мала порівняно з їх довжиною, — хвилі нескінченно малої амплітуди — і одержано їх закон дисперсії.

В другому підрозділі проаналізовано наближення канонічної моделі. Показано, що модель з достатньою точністю застосовна для опису великомасштабних хвиль метрової і більшої довжини. Ефекти поверхневого натягу стають важливими на масштабах $0.01 \div 0.1\,м$, а ефекти в'язкості й теплопровідності – на масштабах до $0.01\,м$. Стисливістю рідини можна нехтувати при швидкостях, значно менших за швидкість звуку в рідині, а також для глибини до кількох сотень метрів. Рухом повітря можна нехтувати при швидкостях до $10\,м/с$. В цілому великомасштабні морські й океанські хвилі задовольняють цим умовам і є реальними фізичними об'єктами, до яких застосовна теорія, викладена в даній роботі.

В третьому підрозділі детально розглянуто відомі властивості гравітаційних хвиль скінченної амплітуди, коли не можна нехтувати нелінійністю граничних умов, та методи їх розрахунку. В безрозмірних змінних задача зводиться до пошуку сімейства двопараметричних розв'язків за безрозмірними амплітудою хвилі та глибиною рідини, віднормованими на довжину хвилі. Для кожного фіксованого значення глибини достовірно відоме лише одне однопараметричне (за амплітудою хвилі) сімейство розв'язків, що носить назву стоксових хвиль. Швидкість частинок рідини на гребені стоксових хвиль при збільшенні амплітуди монотонно зростає від нескінченно малого значення (порівняно з фазовою швидкістю хвилі) для лінійних хвиль до фазової швидкості хвилі для хвилі максимальної висоти. В цьому граничному випадку частинки рідини на гребені хвилі рухаються з тією ж швидкістю, що і сама хвиля, — утворюється точка застою (особлива точка). При цьому гребінь хвилі утворює 120° кут — гранична хвиля Стокса. Саме вивченню властивостей сімейства стоксових хвиль та методам їх розрахунку присвячено значну частину третього підрозділу.

Увагу також приділено новому сімейству наближених сингулярних розв'язків канонічної моделі — нерегулярним хвилям, що відмінні від стоксових хвиль. Можливість існування цих розв'язків обумовлене квадратичною нелінійністю рівняння Бернуллі. Розглянуто можливість того, що нерегулярні хвилі відповідають сімейству гостро-гребеневих хвиль, які за своїми властивостями подібні до граничної хвилі Стокса, але мають меншу амплітуду.

Нарешті, окреслено напрямки подальшого розвитку гідродинаміки хвиль на воді, включаючи нестійкості хвиль, гравітаційно-капілярні та тривимірні хвилі.

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику *Василю Петровичу Лукомському*, без настанов, ідейних порад та допомоги якого ця робота не була б написана. Автор висловлює велику подяку професору *Крістіану Харіфу* та *Марку Французу* за плідну співпрацю та опіку під час свого візиту до Інституту нерівноважних процесів (Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre), Марсель, Франція, влітку 2002 року в межах міжнародної програми INTAS для молодих вчених, а також за забезпечення автора переважною частиною з потрібної для цього огляду літератури. Нарешті, моя щира подяка *Дідьє Кламонду* за цікавість, яку він проявив до робіт автора, плідне обговорення різних питань розповсюдження хвиль на воді та забезпечення автора потрібною літературою. Автор вдячний INTAS за трирічну фінансову підтримку проекту “Хвилі великої амплітуди: сильно нелінійні поверхневі хвилі в океані”, результатом виконання якого і стала дана робота.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бабенко К. И. Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294, № 5. – С. 1033–1037.
2. Бабенко К. И. О локальной теореме существования в теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294, № 6. – С. 1289–1292.
3. Биркгоф Г. Гидродинамика: Пер. с англ. – М.: Из-во иностранной литературы, 1954. – 183 с.
4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: Пер. с нем., перераб. / Ред. Г. Гроше, В. Циглер. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
5. Буссе Ф. Г. Переход к турбулентности в конвекции Рэлея-Бенара // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности: Пер. с англ. / Ред. Х. Суинни, Д. Голлаб. – М.: Мир, 1984. – С. 124–168.
6. Ганджа І. С., Лукомський В. П. Субгармонічні стаціонарні стани та нестійкості крутих симетричних гравітаційних хвиль на поверхні рідини довільної глибини // Вісник Львівського університету. Серія фізична. – 2001. – Т. 34. – С. 174–178.
7. Захаров В. Е. Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией // ЖЭТФ. – 1966. – Т. 51, № 4. – С. 1107–1114.
8. Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1968. – № 2. – С. 86–94.
9. Захаров В. Е., Харитонов В. Г. Неустойчивость монохроматических волн на поверхности жидкости произвольной глубины // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1970. – № 5. – С. 45–49.

10. Иродов И. Е. Задачи по общей физике: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 416 с.
11. Йорк Д. А., Йорк Э. Д. Хаотическое поведение и гидродинамика // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности: Пер. с англ. / Ред. Х. Суинни, Д. Голлаб. – М.: Мир, 1984. – С. 101–123.
12. Косевич А. М., Ковалёв А. С. Введение в нелинейную физическую механику. – К.: Наукова думка, 1989. – 304 с.
13. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика / Ред. И. А. Кибель. – 5-е изд. – М.: Из-во технико-теоретической литературы, 1955. – Т. 1. – 560 с.
14. Красовский Ю. П. К теории установившихся волн немалой амплитуды // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 130, № 6. – С. 1237–1240.
15. Красовский Ю. П. К теории установившихся волн конечной амплитуды // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1961. – Т. 1, № 5. – С. 836–855.
16. Ламб Г. Гидродинамика: Пер. с англ. – М.: Из-во технико-теоретической литературы, 1947. – 928 с.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. – Т. 6: Гидродинамика. – 3-е изд. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
18. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учебник для вузов. – 6-е изд. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
19. Монин А. С., Красицкий В. П. Явления на поверхности океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 376 с.
20. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 424 с.
21. Некрасов А. И. О волне Стокса // Изв. Иваново-Вознесенского Политехн. Инст.[1] – 1919. – № 2. – С. 81–89.
22. Некрасов А. И. О волнах установившегося вида // Изв. Иваново-Вознесенского Политехн. Инст.[2] – 1921. – № 3. – С. 52–65.
23. Некрасов А. И. О волнах установившегося вида. Глава II //

[1] див. Некрасов А. И. “Собрание сочинений” [25, с. 26–34].
[2] див. Некрасов А. И. “Собрание сочинений” [25, с. 35–51].

Изв. Иваново-Вознесенского Политехн. Инст.[3] – 1922. – № 6. – С. 155–177.

24. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости.[4] – М.: Из-во АН СССР, 1951. – 96 с.
25. Некрасов А. И. Собрание сочинений. – М.: Из-во АН СССР, 1961. – Т. 1. – 444 с.
26. Ньюмен Д. Морская гидродинамика: Пер. с англ. – Л.: Судостроение, 1985. – 368 с.
27. Орир Д. Физика: В 2-х т., пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – Т. 1. – 336 с.
28. Плотников П. И. Обоснование гипотезы Стокса в теории поверхностных волн // Динамика сплошной среды. – 1982. – № 57. – С. 41–76.
29. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – 4-е изд. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
30. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – 4-е изд. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 528 с.
31. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – 4-е изд. – М.: Наука, 1984. – Т. 2. – 560 с.
32. Селезов И. Т., Корсунский С. В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. – К.: Наукова думка, 1991. – 200 с.
33. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 816 с.
34. Триттон Д. Д., Дэвис П. А. Неустойчивости в геофизической гидродинамике // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности: Пер. с англ. / Ред. Х. Суинни, Д. Голлаб. – М.: Мир, 1984. – С. 271–316.
35. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
36. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: Пер. с англ. – Т. 7: Физика сплошных сред. – 2-е изд. – М.: Мир, 1977. – 288 с.
37. Хемминг Р. В. Численные методы: Пер. с англ. – М.: Наука, 1972. – 400 с.

[3] див. Некрасов А. И., Из-во АН СССР (1951) [24, розділ 3].

[4] див. Некрасов А. И. “Собрание сочинений” [25, с. 358–434].

38. Amick C. J., Fraenkel L. E., Toland J. F. On the Stokes conjecture for the wave of extreme form // Acta mathematica. – 1982. – Vol. 148. – P. 193–214.
39. Amick C. J. Bounds for water waves // Arch. Rational Mech. Anal. – 1987. – Vol. 99. – P. 91–114.
40. Amick C. J., Fraenkel L. E. On the behavior near the crest of waves of extreme form // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – Vol. 299, № 1. – P. 273–298.
41. Arfken G. B., Weber H. J. Mathematical Methods for Physicists. – 4 edn. – London: Academic Press, 1995. – 1029 p.
42. Baesens C., MacKay R. S. Uniformly travelling water waves from a dynamical systems viewpoint: some insights into bifurcations from Stokes' family // J. Fluid Mech. – 1992. – Vol. 241. – P. 333–347.
43. Banner M. L., Peregrine D. H. Wave breaking in deep water // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1993. – Vol. 25. – P. 373–397.
44. Benjamin T. B., Feir J. E. The disintegration of wave trains on deep water // J. Fluid Mech. – 1967. – Vol. 27, № 3. – P. 417–430.
45. Benjamin T. B. Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems[5] // Proc. Roy. Soc. London A. – 1967. – Vol. 299. – P. 59–75.
46. Benney D. J., Roskes G. J. Wave instabilities // Stud. Appl. Math. – 1970. – Vol. 48. – P. 377–385.
47. Bloor M. I. J. Large amplitude surface waves // J. Fluid Mech. – 1978. – Vol. 84, № 1. – P. 167–179.
48. Bonmarin P. Geometric properties of deep-water breaking waves // J. Fluid Mech. – 1989. – Vol. 209. – P. 405–433.
49. Bryant P. J. Oblique instability of periodic waves in shallow water // J. Fluid Mech. – 1978. – Vol. 86. – P. 783–792.
50. Buffoni B., Dancer E. N., Toland J. F. The regularity and local bifurcation of steady periodic water waves // Arch. Rational Mech. Anal. – 2000. – Vol. 152. – P. 207–240.
51. Buffoni B., Dancer E. N., Toland J. F. The sub-harmonic bifurcation of Stokes waves // Arch. Rational Mech. Anal. – 2000. – Vol. 152. –

[5]Існує переклад: Бенджамен Т. Б. Неустойчивость периодических цугов волн в нелинейных системах с дисперсией: Пер. с англ. // Нелинейная теория распространения волн / Ред. Г. И. Баренблатт. – М.: Мир, 1970. – С. 83–104.

P. 241–271.
52. Buffoni B., Séré É., Toland J. F. Surface water waves as saddle points of the energy // Calculus of Variations. – 2003. – Vol. 17. – P. 199–220.
53. Byatt-Smith J. G. B. An exact integral equation for steady surface waves // Proc. Roy. Soc. London A. – 1970. – Vol. 315. – P. 405–418.
54. Chandler G. A., Graham I. G. The computation of water waves modelled by Nekrasov's equation // SIAM J. Numer. Anal. – 1993. – Vol. 30, №4. – P. 1041–1065.
55. Chappelear J. E. Direct numerical calculation of wave properties // J. Geophys. Res. – 1961. – Vol. 66, №2. – P. 501–508.
56. Chappelear J. E. Shallow-water waves // J. Geophys. Res. – 1962. – Vol. 67. – P. 4693–4704.
57. Chen B., Saffman P. G. Steady gravity-capillary waves on deep water – I. Weakly nonlinear waves // Stud. Appl. Math. – 1979. – Vol. 60. – P. 183–210.
58. Chen B., Saffman P. G. Numerical evidence for the existence of new types of gravity waves of permanent form on deep water // Stud. Appl. Math. – 1980. – Vol. 62. – P. 1–21.
59. Chen B., Saffman P. G. Three-dimensional stability and bifurcation of capillary and gravity waves on deep water // Stud. Appl. Math. – 1985. – Vol. 72. – P. 125–147.
60. Clamond D. Steady finite-amplitude waves on a horizontal seabed of arbitrary depth // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 398. – P. 45–60.
61. Clamond D. Cnoidal-type surface waves in deep water // J. Fluid Mech. – 2003. – Vol. 489. – P. 101–120.
62. Cokelet E. D. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. – 1977. – Vol. 286. – P. 183–221.
63. Crapper G. D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude // J. Fluid Mech. – 1957. – Vol. 2. – P. 532–540.
64. Crawford D. R., Lake B. M., Saffman P. G., Yuen H. C. Stability of weakly nonlinear deep-water waves in two and three dimensions // J. Fluid Mech. – 1981. – Vol. 105. – P. 177–192.
65. Debiane M., Kharif C. A new limiting form for steady periodic gravity waves with surface tension on deep water // Phys. Fluids. – 1996. – Vol. 8, №10. – P. 2780–2782.

66. Debiane M., Kharif C. A new way for the calculation of steady periodic capillary-gravity waves on deep water // European Journal of Mechanics, B/Fluids. – 1997. – Vol. 16, № 2. – P. 257–275.
67. Debiane M., Kharif C., Amaouche M. A new method for the calculation of steady periodic capillary-gravity waves on water of arbitrary uniform depth // European Journal of Mechanics, B/Fluids. – 2000. – Vol. 19. – P. 855–870.
68. De S. C. Contributions to the theory of Stokes waves // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1955. – Vol. 51. – P. 713–736.
69. Dias F., Kharif C. Nonlinear gravity waves and capillary-gravity waves // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 31. – P. 301–346.
70. Dore B. D. Some effects of the air-water interface on gravity waves // Geophys. Astroph. Fluid Dyn. – 1978. – Vol. 10, № 4. – P. 215–230.
71. Duncan J. H. Spilling breakers // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 33. – P. 519–547.
72. Faltinsen O. M. Wave loads on offshore structures // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 22. – P. 35–56.
73. Feir J. E. Discussion: Some results from wave pulse experiments[6] // Proc. Roy. Soc. London A. – 1967. – Vol. 299. – P. 54–58.
74. Fenton J. D. A high-order cnoidal wave theory // J. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 94, № 1. – P. 129–161.
75. Francius M., Kharif C. On the disappearance of the lowest-order instability for steep gravity waves in finite depth // Phys. Fluids. – 2003. – Vol. 15, № 8. – P. 2445–2448.
76. Gandzha I. S., Lukomsky V. P., Tsekhmister Y. V., Chalyi A. V. A new type of steady gravity waves on fluid of arbitrary constant depth // Geophysical Research Abstracts (EGS 27$^{\text{th}}$ General Assembly, Nice, France). – Katlenburg-Lindau: European Geophysical Society. – 2002. – Vol. 4. – P. A–01 437.
77. Gandzha I. S., Lukomsky V. P., Lukomsky D. V., Debiane M., Kharif C. Numerical evidence for the existence of a new type of steady gravity waves on deep water // Geophysical Research Abstracts (EGS 27$^{\text{th}}$

[6]Існує переклад: Фейр Д. Обсуждение. Некоторые результаты опытов с волновыми импульсами: Пер. с англ. // Нелинейная теория распространения волн / Ред. Г. И. Баренблатт. – М.: Мир, 1970. – С. 77–82.

General Assembly, Nice, France). – Katlenburg-Lindau: European Geophysical Society. – 2002. – Vol. 4. – P. A–01 347.

78. Gandzha I. S., Lukomsky V. P., Lukomsky D. V. Sharp-crested subharmonic gravity waves with discontinuous streamlines // Geophysical Research Abstracts (EGS-AGU-EUG Joint Assembly, Nice, France). – Katlenburg-Lindau: European Geosciences Union. – 2003. – Vol. 5. – P. A–12 430.
79. Garabedian P. R. Surface waves of finite depth // J. d'Analyse Mathématique. – 1965. – Vol. 14. – P. 161–169.
80. Grant M. A. The singularity at the crest of a finite amplitude progressive Stokes wave // J. Fluid Mech. – 1973. – Vol. 59. – P. 257–262.
81. Havelock T. H. Periodic irrotational waves of finite height // Proc. Roy. Soc. London A. – 1919. – Vol. 95. – P. 38–51.
82. Jenkins A. D. A stationary potential-flow approximation for a breaking-wave crest // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 280. – P. 335–347.
83. Jillians W. J. The superharmonic instability of Stokes waves in deep water // J. Fluid Mech. – 1989. – Vol. 204. – P. 563–579.
84. Keady G., Norbury J. On the existence theory for irrotational water waves // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1978. – Vol. 83. – P. 137–157.
85. Kharif C., Ramamonjiarisoa A. Deep water gravity wave instabilities at large steepness // Phys. Fluids. – 1988. – Vol. 31. – P. 1286–1288.
86. Kharif C., Ramamonjiarisoa A. On the stability of gravity waves on deep water // J. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 218. – P. 163–170.
87. Kinnersley W. Exact large amplitude capillary waves on sheets of fluid // J. Fluid Mech. – 1976. – Vol. 77, № 2. – P. 229–241.
88. Korteweg D. J., De Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave // Philos. Mag. – 1895. – Vol. 5, № 39. – P. 422–443.
89. Laitone E. V. The second approximation to cnoidal and solitary waves // J. Fluid Mech. – 1960. – Vol. 9. – P. 430–444.
90. Lake B. M., Yuen H. C., Rungaldier H., Ferguson W. E. Nonlinear deep-water waves: Theory and experiment. Part 2. Evolution of a continuous wave train // J. Fluid Mech. – 1977. – Vol. 83, № 1. – P. 49–74.
91. Levi-Cività T. Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie // Mathematische Annalen. – 1925. – Vol. 93. – P. 264–314.

92. Lighthill J. Fundamentals concerning wave loading on offshore structures // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 173. – P. 667–681.
93. Lighthill J. Fluid Mechanics // Twentieth Century Physics / Ed. L. M. Brown, A. Pais, B. Pippard. – Bristol, Philadelphia, New York: Institute of Physics Publishing, American Institute of Physics Press, 1995. – Vol. 2. – Chap. 10. – P. 795–912.
94. Lighthill M. J. Contributions to the theory of waves in non-linear dispersive systems // J. Inst. Math. Appl. – 1965. – Vol. 1. – P. 269–306.
95. Lighthill M. J. Some special cases treated by the Whitham theory[7] // Proc. Roy. Soc. London A. – 1967. – Vol. 299. – P. 28–53.
96. Longuet-Higgins M. S. Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude // Proc. Roy. Soc. London A. – 1975. – Vol. 342. – P. 157–174.
97. Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D. The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation // Proc. Roy. Soc. London A. – 1976. – Vol. 350. – P. 1–26.
98. Longuet-Higgins M. S., Fox M. J. H. Theory of the almost-highest wave: the inner solution // J. Fluid Mech. – 1977. – Vol. 80, № 4. – P. 721–741.
99. Longuet-Higgins M. S. Some new relations between Stokes's coefficients in the theory of gravity waves // J. Inst. Math. Appl. – 1978. – Vol. 22. – P. 261–273.
100. Longuet-Higgins M. S. The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. I. Superharmonics // Proc. Roy. Soc. London A. – 1978. – Vol. 360. – P. 471–488.
101. Longuet-Higgins M. S. The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water. II. Subharmonics // Proc. Roy. Soc. London A. – 1978. – Vol. 360. – P. 489–505.
102. Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D. The deformation of steep surface waves on water. II. Growth of normal-mode instabilities // Proc. Roy. Soc. London A. – 1978. – Vol. 364. – P. 1–28.
103. Longuet-Higgins M. S., Fox M. J. H. Theory of the almost-highest wave. Part 2. Matching and analytic extension // J. Fluid Mech. – 1978. –

[7] Існує переклад: Лайтхилл М. Д. Некоторые частные случаи применения теории Уизема: Пер. с англ. // Нелинейная теория распространения волн / Ред. Г. И. Баренблатт. – М.: Мир, 1970. – С. 43–76.

Vol. 85, № 4. – P. 769–786.
104. Longuet-Higgins M. S. The trajectories of particles in steep, symmetric gravity waves // J. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 94, № 3. – P. 497–517.
105. Longuet-Higgins M. S. Spin and angular momentum in gravity waves // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 97, № 1. – P. 1–25.
106. Longuet-Higgins M. S. On integrals and invariants for inviscid, irrotational flow under gravity // J. Fluid Mech. – 1983. – Vol. 134. – P. 155–159.
107. Longuet-Higgins M. S. New integral relations for gravity waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. – 1984. – Vol. 149. – P. 205–215.
108. Longuet-Higgins M. S. On the stability of steep gravity waves // Proc. Roy. Soc. London A. – 1984. – Vol. 396. – P. 269–280.
109. Longuet-Higgins M. S. Bifurcation in gravity waves // J. Fluid Mech. – 1985. – Vol. 151. – P. 457–475.
110. Longuet-Higgins M. S. Bifurcation and instability in gravity waves // Proc. Roy. Soc. London A. – 1986. – Vol. 403. – P. 167–187.
111. Longuet-Higgins M. S. Eulerian and Lagrangian aspects of surface waves // J. Fluid Mech. – 1986. – Vol. 173. – P. 683–707.
112. Longuet-Higgins M. S. Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 179. – P. 547–555.
113. Longuet-Higgins M. S. Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves. Part 2. Water of finite depth // J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 186. – P. 321–336.
114. Longuet-Higgins M. S., Cleaver R. P. Crest instabilities of gravity waves. Part 1. The almost highest wave // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 258. – P. 115–129.
115. Longuet-Higgins M. S., Cleaver R. P., Fox M. J. H. Crest instabilities of gravity waves. Part 2. Matching and asymptotic analysis // J. Fluid Mech. – 1994. – Vol. 259. – P. 333–344.
116. Longuet-Higgins M. S., Fox M. J. H. Asymptotic theory for the almost-highest solitary wave // J. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 317. – P. 1–19.
117. Longuet-Higgins M. S., Dommermuth D. G. Crest instabilities of gravity waves. Part 3. Nonlinear development and breaking // J. Fluid Mech. – 1997. – Vol. 336. – P. 33–50.
118. Longuet-Higgins M. S., Tanaka M. On the crest instabilities of steep

surface waves // J. Fluid Mech. – 1997. – Vol. 336. – P. 51–68.

119. Longuet-Higgins M. S. Asymptotic forms for jets from standing waves // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 447. – P. 287–297.

120. Lukomsky V. P., Gandzha I. S., Lukomsky D. V. Computational analysis of the almost-highest waves on deep water // Comp. Phys. Comm. – 2002. – Vol. 147, № 1–2. – P. 548–551.

121. Lukomsky V. P., Gandzha I. S., Lukomsky D. V. Steep sharp-crested gravity waves on deep water // Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 89, № 16. – P. 164 502–1-4.

122. Lukomsky V. P., Gandzha I. S. Fractional Fourier approximations for potential gravity waves on deep water // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2003. – Vol. 10, № 6. – P. 599–614.

123. Lukomsky V. P., Gandzha I. S., Lukomsky D. V. Reply Comment on "Steep sharp-crested gravity waves on deep water" // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93, № 6. – P. 069 403–1.

124. MacKay R. S., Saffman P. G. Stability of water waves // Proc. Roy. Soc. London A. – 1986. – Vol. 406. – P. 115–125.

125. Maklakov D. V. Almost-highest gravity waves on water of finite depth // Euro. J. Appl. Math. – 2002. – Vol. 13. – P. 67–93.

126. McLean J. W., Ma Y. C., Martin D. U., Saffman P. G., Yuen H. C. Three-dimensional instability of finite-amplitude water waves // Phys. Rev. Lett. – 1981. – Vol. 46, № 13. – P. 817–820.

127. McLean J. W. Instabilities of finite-amplitude water waves // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 114. – P. 315–330.

128. McLean J. W. Instabilities of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 114. – P. 331–341.

129. McLeod J. B. The asymptotic behavior near the crest of waves of extreme form // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – Vol. 299, № 1. – P. 299–302.

130. McLeod J. B. The Stokes and Krasovskii conjectures for the wave of greatest height[8] // Stud. Appl. Math. – 1997. – Vol. 98. – P. 311–333.

131. Meiron D. I., Saffman P. G., Yuen H. C. Calculation of steady three-dimensional deep water waves // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 124. – P. 109–121.

[8]Вперше опубліковано в 1979 р.: Math. Research Center report no. 2041, University of Wisconsin, Madison.

132. Melville W. K. The instability and breaking of deep-water waves // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 115. – P. 165–185.
133. Melville W. K. The role of surface-wave breaking in air-sea interaction // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 28. – P. 279–321.
134. Michell J. H. The highest waves in water // Philos. Mag. – 1893. – Vol. 5, № 36. – P. 430–437.
135. Norman A. C. Expansions for the shape of maximum amplitude Stokes waves // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 66. – P. 261–265.
136. Olfe D. B., Rottman J. W. Some new highest-wave solutions for deep-water waves of permanent form // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 100, № 4. – P. 801–810.
137. Peregrine D. H. The fascination of fluid mechanics[9] // J. Fluid Mech. – 1981. – Vol. 106. – P. 59–80.
138. Peregrine D. H. Breaking waves on beaches[10] // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1983. – Vol. 15. – P. 149–178.
139. Phillips O. M. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude // J. Fluid Mech. – 1960. – Vol. 9. – P. 193–217.
140. Plotnikov P. I., Toland J. F. Convexity of Stokes Waves of Extreme Form // Arch. Rational Mech. Anal. – 2004. – Vol. 171. – P. 349–416.
141. Rayleigh, Lord. On waves // Philos. Mag. – 1876. – Vol. 5, № 1. – P. 257–279.
142. Rienecker M. M., Fenton J. D. A Fourier approximation method for steady water waves // J. Fluid Mech. – 1981. – Vol. 104. – P. 119–137.
143. Roberts A. J., Schwartz L. W. The calculation of nonlinear short-crested gravity waves // Phys. Fluids. – 1983. – Vol. 26, № 9. – P. 2388–2392.
144. Rottman J. W., Olfe D. B. Numerical calculations of steady gravity-capillary waves using an integro-differential formulation // J. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 94, № 4. – P. 777–793.
145. Saffman P. G. Long wavelength bifurcation of gravity waves on deep water // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 101, № 3. – P. 567–581.

[9] Існує переклад: Перегрин Д. Очарование гидромеханики: Пер. с англ. // Современная гидромеханика. Успехи и проблемы / Ред. Д. Бэтчелор, Г. Моффат. – М.: Мир, 1984. – С. 91–119.

[10] Існує переклад: Перегрин Д. Разрушение волн на отлогих берегах: Пер. с англ. // Нелинейные волновые процессы: Сб. статей / Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. – М.: Мир, 1987. – С. 37–71.

146. Saffman P. G., Yuen H. C. Bifurcation and symmetry breaking in nonlinear dispersive waves // Phys. Rev. Lett. – 1980. – Vol. 44, № 17. – P. 1097–1100.
147. Saffman P. G., Yuen H. C. A new type of three-dimensional deep-water wave of permanent form // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 101. – P. 797–808.
148. Saffman P. G., Yuen H. C. Three-dimensional waves on deep water // Advances in nonlinear waves / Ed. L. Debnath. – London: Pitman, 1985. – P. 1–30.
149. Saffman P. G. The superharmonic instability of finite-amplitude water waves // J. Fluid Mech. – 1985. – Vol. 159. – P. 169–174.
150. Sasaki K., Murakami T. Irrotational progressive surface gravity waves near the limiting height // J. Ocean. Soc. Japan. – 1973. – Vol. 29. – P. 94–105.
151. Schwartz L. W. Computer extension and analytic continuation of Stokes' expansion for gravity waves // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 62, № 3. – P. 553–578.
152. Schwartz L. W., Vanden-Broeck J.-M. Numerical solution of the exact equations for capillary-gravity waves // J. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 95, № 1. – P. 119–139.
153. Schwartz L. W., Fenton J. D. Strongly nonlinear waves[11] // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 14. – P. 39–60.
154. Simmen J. A., Saffman P. G. Steady deep-water waves on a linear shear current // Stud. Appl. Math. – 1985. – Vol. 73. – P. 35–57.
155. Spielvogel E. R. A variational principle for waves of infinite depth // Arch. Rational Mech. Anal. – 1970. – Vol. 39, № 3. – P. 189–205.
156. Srokosz M. A. A note on particle trajectories in the highest wave // J. Fluid Mech. – 1981. – Vol. 111. – P. 491–495.
157. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves // Camb. Phil. Soc. Trans. – 1847. – Vol. 8. – P. 441–455.
158. Stokes G. G. Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves // Mathematical and Physical Papers. – 1880. – Vol. 1. – P. 314–326.

[11] Існує переклад: Шварц Л., Фентон Д. Сильно нелинейные волны: Пер. с англ. // Нелинейные волновые процессы: Сб. статей / Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. – М.: Мир, 1987. – С. 10–36.

159. Stokes G. G. Considerations relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated whithout change of form // Mathematical and Physical Papers. – 1880. – Vol. 1. – P. 225–228.
160. Struik D. J. Détermination rigoureuse des ondes irrotationelles permanentes dans un canal à profondeur finie // Mathematische Annalen. – 1926. – Vol. 95. – P. 595–634.
161. Su M.-Y., Bergin M., Marler P., Myrick R. Experiments on nonlinear instabilities and evolution of steep gravity-wave trains // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 124. – P. 45–72.
162. Su M.-Y. Three-dimensional deep-water waves. Part I. Experimental measurement of skew and symmetric wave patterns // J. Fluid Mech. – 1982. – Vol. 124. – P. 73–108.
163. Tanaka M. The stability of steep gravity waves // J. Phys. Soc. Japan. – 1983. – Vol. 52. – P. 3047–3055.
164. Tanaka M. The stability of steep gravity waves. Part 2 // J. Fluid Mech. – 1985. – Vol. 156. – P. 281–289.
165. Tanaka M. The stability of solitary waves // Phys. Fluids. – 1986. – Vol. 29, № 3. – P. 650–655.
166. Tanaka M. A method of calculation of periodic steady waves in water of finite depth: The manual to the program `Stokes_finite.f`. – 1996. – 3 p.
167. Teles da Silva A. F., Peregrine D. H. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity // J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 195. – P. 281–302.
168. Toland J. F. On the existence of a wave of greatest height and Stokes's conjecture // Proc. Roy. Soc. London A. – 1978. – Vol. 363. – P. 469–485.
169. Toland J. F. Stokes waves // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 1996. – Vol. 7. – P. 1–48.
170. Vanden-Broeck J.-M., Schwartz L. W. Numerical computation of steep gravity waves in shallow water // Phys. Fluids. – 1979. – Vol. 22, № 10. – P. 1868–1871.
171. Vanden-Broeck J.-M. Some new gravity waves in water of finite depth // Phys. Fluids. – 1983. – Vol. 26, № 9. – P. 2385–2387.
172. Whitham G. B. Non-linear dispersion of water waves // J. Fluid Mech. –

1967. – Vol. 27. – P. 399–412.
173. Williams J. M. Limiting gravity waves in water of finite depth // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. – 1981. – Vol. 302. – P. 139–188.
174. Williams J. M. Near-limiting gravity waves in water of finite depth // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. – 1985. – Vol. 314. – P. 353–377.
175. Wilton J. R. On deep water waves // Philos. Mag. – 1914. – Vol. 6, № 27. – P. 385–394.
176. Yamada H. Highest waves of permanent type on the surface of deep water // Rep. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ. – 1957. – Vol. 5. – P. 37–52.
177. Yamada H., Shiotani T. On the highest water waves of permanent type // Bull. Disaster Prev. Res. Inst. Kyushu Univ. – 1968. – Vol. 18. – P. 1–22.
178. Yuen H. C., Lake B. M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves[12] // Advances in Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 22. – P. 67–229.
179. Zhang J., Melville W. K. Three-dimensional instabilities of nonlinear gravity-capillary waves // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 174. – P. 187–208.
180. Zufiria J. A., Saffman P. G. The superharmonic instability of finite-amplitude surface waves on water of finite depth // Stud. Appl. Math. – 1986. – Vol. 74. – P. 259–266.
181. Zufiria J. A. Non-symmetric gravity waves on water of infinite depth // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 181. – P. 17–39.
182. Zufiria J. A. Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth // J. Fluid Mech. – 1987. – Vol. 184. – P. 183–206.

[12]Існує переклад: Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде: Пер. с англ. // Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. – М.: Мир, 1987. – 179 с.