

РОЗДІЛ 1

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

В. П. Лукомський, І. С. Ганджа

Вступ

XX століття, що минуло, докорінно змінило уявлення науки про оточуючий світ, відкривши в фізиці й математиці нові горизонти та напрями досліджень. Одним з таких напрямків є дослідження нелінійних явищ, що є невід'ємною ознакою сучасних наукових проблем. Одним з головних типів нелінійного руху, що спостерігається в природі, є періодичні коливання. До них зводяться різноманітні процеси в багатьох областях фізики, математики, біофізики, хімії тощо, кожного разу підкреслюючи особливу роль коливань. Саме тому дослідження коливальних процесів займає одне з ключових місць у сучасному природознавстві. Теоретичне вивчення періодичних коливань зводиться до дослідження відповідної математичної моделі. Зокрема, коливання з одним степенем вільності, які розглядатимемо надалі, описуються звичайними диференціальними рівняннями другого порядку.

Класифікації відповідних осциляторних задач присвячено перший підрозділ даної роботи. Для лінійних коливань справджується принцип суперпозиції, який дозволяє побудувати загальний розв'язок довільного лінійного диференціального рівняння. Сучасна ж фізика є наукою суттєво нелінійних явищ, які можна описати лише за допомогою нелінійних рівнянь. Нелінійність призводить до незастосовності принципу суперпозиції, разом з усіма основани-

ми на ньому методами побудови загального розв'язку. Тому лише для дуже вузького класу нелінійних рівнянь вдається побудувати точний розв'язок у відомих функціях. У всіх інших випадках використовуються наближені методи побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Наближені методи поділяються на чисельні та аналітичні. Часово-різницеві чисельні методи (Рунге-Кутта, Адамса тощо) застосовні для розв'язку широкого класу рівнянь. Вони стали ефективним засобом з розвитком комп'ютерної техніки. Недоліком чисельних методів є те, що за набором чисельних даних важко вивчати загальні закономірності розв'язку. Принциповою ж проблемою є те, що згадані методи спроможні відшукати лише *стійкі* розв'язки, проте як *нестійкі* розв'язки є вкрай важливими для розуміння природи коливальних процесів, зокрема, різноманітних біфуркаційних явищ. Внаслідок цього постає необхідність у розробці нових аналітичних методів побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь. Класичні аналітичні методи базуються на теорії збурень по малому параметру нелінійності [8]. Одним з варіантів методів збурень є асимптотичні методи нелінійної механіки [1], які дають змогу дослідити достатньо широкий клас нелінійних коливальних систем, що мають малий параметр нелінійності. Такі системи зазвичай називаються *слабо нелінійними*.

Проте сьогодні постає багато задач, в яких не можна вважати нелінійність малою. Такі задачі втілюються в *сильно* (або *суттєво*) *нелінійні* рівняння, де нелінійні доданки за своєю величиною порівняні з лінійними, або навіть їх переважають. В цьому випадку мають бути застосовані методи зовсім іншої будови, що не ґрунтуються на припущенні про малість нелінійності. Саме на таких методах зосереджено другий підрозділ роботи. При вивченні періодичних процесів розв'язок шукають в класі періодичних функ-

цій. Одним з найефективніших методів, придатних як для слабо, так і сильно нелінійних рівнянь, є *метод гармонічного балансу* (див., наприклад, [78, с. 81–93]), який також називають методом Гальоркіна [6]. В методі гармонічного балансу періодичний розв'язок задається у вигляді ряду Фур'є, збіжного незалежно від величини нелінійності, і в якому враховується лише скінченне (як правило, незначне) число гармонік.

При вивченні квазігармонічних коливань, тобто коливань, у яких амплітуди гармонік монотонно (і досить швидко) спадають з ростом їх номера, використовується *метод рівномірних розкладів* [50]. У цьому методі пропонується подальший асимптотичний розклад частоти та амплітуд гармонік коливань по малому параметру, пов'язаному не з нелінійністю, а з відношенням амплітуд вищих гармонік до амплітуди головної гармоніки.

Нарешті, в третьому підрозділі на прикладі осцилятора Дюффінга з жорсткою нелінійністю розглянуто явища резонансів, субгармонічні коливання, каскади подвоєння періоду та хаотичні коливання.

1.1. Класифікація осциляторних задач

1.1.1. Вільні коливання. Вільні незатухаючі коливання виникають в консервативних системах і описуються таким рівнянням руху для динамічної змінної u (другий закон Ньютона):

$$\ddot{u} + \frac{\partial V(u)}{\partial u} = 0, \quad u(0) = x_0, \quad \dot{u}(0) = y_0, \quad (1)$$

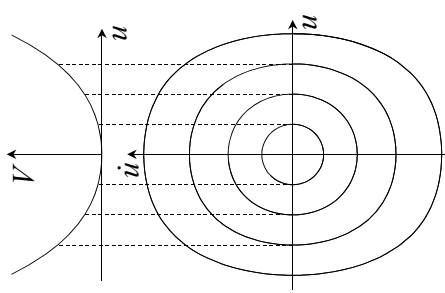
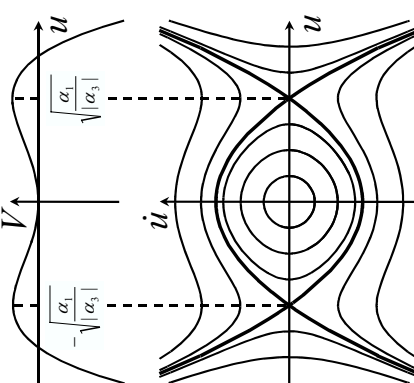
де $V(u)$ — зовнішній потенціал. Визначенню підлягає частота коливань ω , тоді як амплітуда коливань визначається початковою умовою.

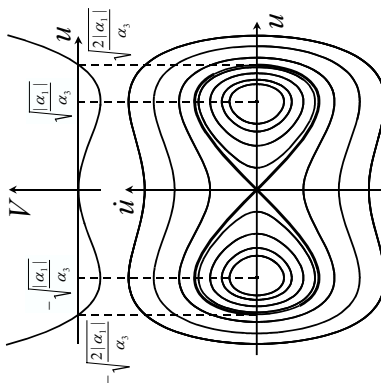
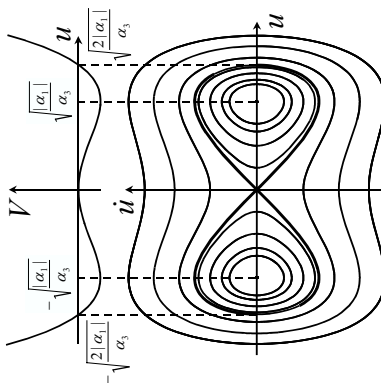
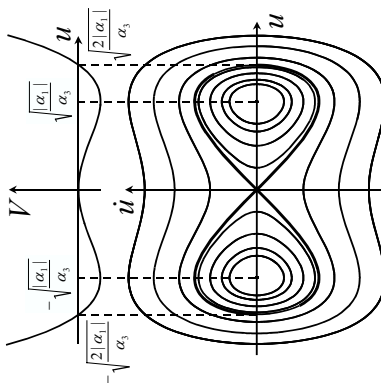
Одним з найпростіших нелінійних рівнянь, що описує вільні коливання в консервативній системі, є рівняння Дюффінга

Таблиця 1

Точні періодичні розв'язки однорідного рівняння Дюффінга з кубічною нелінійністю

$$\ddot{u} = -\frac{dV(u)}{du}, \quad V(u) = \frac{\alpha_1}{2} u^2 + \frac{\alpha_3}{4} u^4; \quad \ddot{u} + \alpha_1 u + \alpha_3 u^3 = 0, \quad u(0) = x_0, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

α_1, α_3	$V(u)$	Розв'язок $u(t)$	$k^2(x_0), x_0^2(k)$	$\omega(k)$	$u_n(k), u_1(k) \equiv a$
$\alpha_1 > 0, \alpha_3 > 0$ жорстка нелінійність $ x_0 < \infty$ $V(u) = \frac{\alpha_1}{2} u^2 + \frac{\alpha_3}{4} u^4$		$x_0 \operatorname{cn} \left(\frac{2K(k)}{\pi} \omega t \right) = \sum_{n=0}^{N_1} u_{2n+1}(k) e^{i(2n+1)\omega(k)t} + c.c.$	$0 < k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $k^2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_3 x_0^2}{\alpha_1 + \alpha_3 x_0^2}$ $x_0^2 = \frac{2\alpha_1}{\alpha_3} \frac{k^2}{1 - 2k^2}$	$\frac{\pi \sqrt{\alpha_1}}{2K(k) \sqrt{1 - 2k^2}}$	$u_{2n+1} = \frac{\sqrt{2/\alpha_3} \omega(k)}{\cosh \left(\pi(n+1/2) \frac{K(k')}{K(k)} \right)}$ $a = \frac{\sqrt{2/\alpha_3} \omega(k)}{\cosh \left(\pi \frac{K(k')}{2K(k)} \right)},$ $k' = \sqrt{1 - k^2}$
$\alpha_1 > 0, \alpha_3 < 0$ м'яка нелінійність $ x_0 < \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}$ $V(u) = \frac{\alpha_1}{2} u^2 - \frac{ \alpha_3 }{4} u^4$		$x_0 \frac{\operatorname{cn} \left(\frac{2K(k)}{\pi} \omega t \right)}{\operatorname{dn} \left(\frac{2K(k)}{\pi} \omega t \right)} = \sum_{n=0}^{N_1} u_{2n+1}(k) e^{i(2n+1)\omega(k)t} + c.c.$	$0 < k < 1$ $k^2 = \frac{ \alpha_3 x_0^2}{2\alpha_1 - \alpha_3 x_0^2}$ $x_0^2 = \frac{2\alpha_1}{ \alpha_3 } \frac{k^2}{1 + k^2}$	$\frac{\pi \sqrt{\alpha_1}}{2K(k) \sqrt{1 + k^2}}$	$u_{2n+1} = \frac{(-1)^n \sqrt{2/ \alpha_3 } \omega(k)}{\sinh \left(\pi(n+1/2) \frac{K(k')}{K(k)} \right)}$ $a = -\frac{\sqrt{2/ \alpha_3 } \omega(k)}{\sinh \left(\pi \frac{K(k')}{2K(k)} \right)},$ $k' = \sqrt{1 - k^2}$

α_1, α_3	$V(u)$	Розв'язок $u(t)$	$k^2(x_0), x_0^2(k)$	$\omega(k)$	$u_n(k), u_1(k) \equiv a$
$\alpha_1 < 0, \alpha_3 > 0$ $ x_0 > \sqrt{\frac{2 \alpha_1 }{\alpha_3}}$	$V(u) = -\frac{ \alpha_1 }{2}u^2 + \frac{\alpha_3}{4}u^4$ ДВОЯМНИЙ ПОТЕНЦІАЛ 	$x_0 \operatorname{cn}\left(\frac{2K(k)}{\pi} \omega t\right) = \sum_{n=0}^{N_1} u_{2n+1}(k) e^{i(2n+1)\omega(k)t} + c.c.$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < k < 1$ $k^2 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_3 x_0^2}{\alpha_3 x_0^2 - \alpha_1 }$ $x_0^2 = \frac{2 \alpha_1 }{\alpha_3} \frac{k^2}{2k^2 - 1}$	$\frac{\pi \sqrt{ \alpha_1 }}{2K(k) \sqrt{2k^2 - 1}}$	$u_{2n+1} = \frac{\sqrt{2/\alpha_3} \omega(k)}{\cosh\left(\pi(n+1/2) \frac{K(k')}{K(k)}\right)}$ $a = \frac{\sqrt{2/\alpha_3} \omega(k)}{\cosh\left(\pi \frac{K(k')}{2K(k)}\right)},$ $k' = \sqrt{1 - k^2}$
$\alpha_1 < 0, \alpha_3 > 0$ $\sqrt{\frac{ \alpha_1 }{\alpha_3}} < x_0 < \sqrt{\frac{2 \alpha_1 }{\alpha_3}}$ $ x_0 < \sqrt{\frac{2 \alpha_1 }{\alpha_3}}$		$x_0 \operatorname{dn}\left(\frac{2K(k)}{\pi} \omega t\right) = \sum_{n=0}^{N_1} u_n(k) e^{in\omega(k)t} + c.c.$	$0 < k < 1$ $k^2 = 2 \left(1 - \frac{ \alpha_1 }{\alpha_3 x_0^2}\right)$ $x_0^2 = \frac{2 \alpha_1 }{\alpha_3} \frac{1}{2 - k^2}$	$\frac{\pi \sqrt{ \alpha_1 }}{K(k) \sqrt{2 - k^2}}$	$u_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha_3}} \omega(k)$ $u_n = \sqrt{\frac{1}{2\alpha_3} \cosh\left(\pi n \frac{K(k')}{K(k)}\right)} \omega(k)$ $a = \sqrt{\frac{1}{2\alpha_3} \cosh\left(\pi \frac{K(k')}{K(k)}\right)} \omega(k)$
$\alpha_1 < 0, \alpha_3 > 0$ $ x_0 < \sqrt{\frac{ \alpha_1 }{\alpha_3}}$		$\frac{x_0}{\operatorname{dn}\left(\frac{2K(k)}{\pi} \omega t\right)} = \sum_{n=0}^{N_1} u_n(k) e^{in\omega(k)t} + c.c.$	$0 < k < 1$ $k^2 = \frac{ \alpha_1 - \alpha_3 x_0^2}{ \alpha_1 - \frac{\alpha_3 x_0^2}{2}}$ $x_0^2 = \frac{2 \alpha_1 }{\alpha_3} \frac{1 - k^2}{2 - k^2}$	$\frac{\pi \sqrt{ \alpha_1 }}{K(k) \sqrt{2 - k^2}}$	$u_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\alpha_3}} \omega(k)$ $u_n = \sqrt{\frac{1}{2\alpha_3} \cosh\left(\pi n \frac{K(k')}{K(k)}\right)} \frac{(-1)^n \omega(k)}{\cosh\left(\pi \frac{K(k')}{K(k)}\right)}$ $a = \sqrt{\frac{1}{2\alpha_3} \cosh\left(\pi \frac{K(k')}{K(k)}\right)} \omega(k)$

$$\ddot{u} + \alpha_1 u + \alpha_3 u^3 = 0. \quad (2)$$

Випадок $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 > 0$ називається випадком *жорсткої нелінійності*, а випадок $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 < 0$ — випадком *м'якої нелінійності*. Для рівняння Дюффінга безпосереднім інтегруванням можна явно одержати точний розв'язок в термінах еліптичних функцій Якобі, який наведено в табл. 1 для всіх можливих значень дійсних коефіцієнтів α_1 , α_3 .

На відміну від лінійних коливань, нелінійність призводить до залежності частоти коливань від амплітуди [50, с. 368]:

$$\omega = \sqrt{\alpha_1} \left(1 + \frac{3\alpha_3}{2\alpha_1} a^2 - \frac{15\alpha_3^2}{16\alpha_1^2} a^4 + \dots \right),$$

де a — амплітуда першої гармоніки коливань (див. табл. 1).

Задачі на вільні коливання виникають в багатьох розділах фізики, зокрема:

1. Гідродинаміка. Еволюція обвідної цугу хвиль сталої форми в межах нелінійного рівняння Шредінгера описується рівнянням Дюффінга з $\alpha_1 > 0$, $\alpha_3 > 0$ [79, с. 16].
2. Нелінійна оптика. Квантовий ангармонічний осцилятор визначає відгук нелінійного середовища на електромагнітне випромінювання і також описується рівнянням Дюффінга [53].
3. Фізика твердого тіла. Явище термічного розширення твердих тіл обумовлюється нелінійністю потенціалу Ленарда-Джонса

$$V(u) = -u^{-6} + u^{-12}$$

міжйонної взаємодії [5, с. 408].

1.1.2. Вимушені коливання. Це незатухаючі коливання, що відбуваються в неконсервативних системах за рахунок зовнішнього джерела енергії (накачки) і описуються рівнянням

$$\ddot{u} + g\dot{u} + \frac{\partial V(u)}{\partial u} = 2F \cos \omega t, \quad u(0) = x_0, \quad \dot{u}(0) = y_0, \quad (3)$$

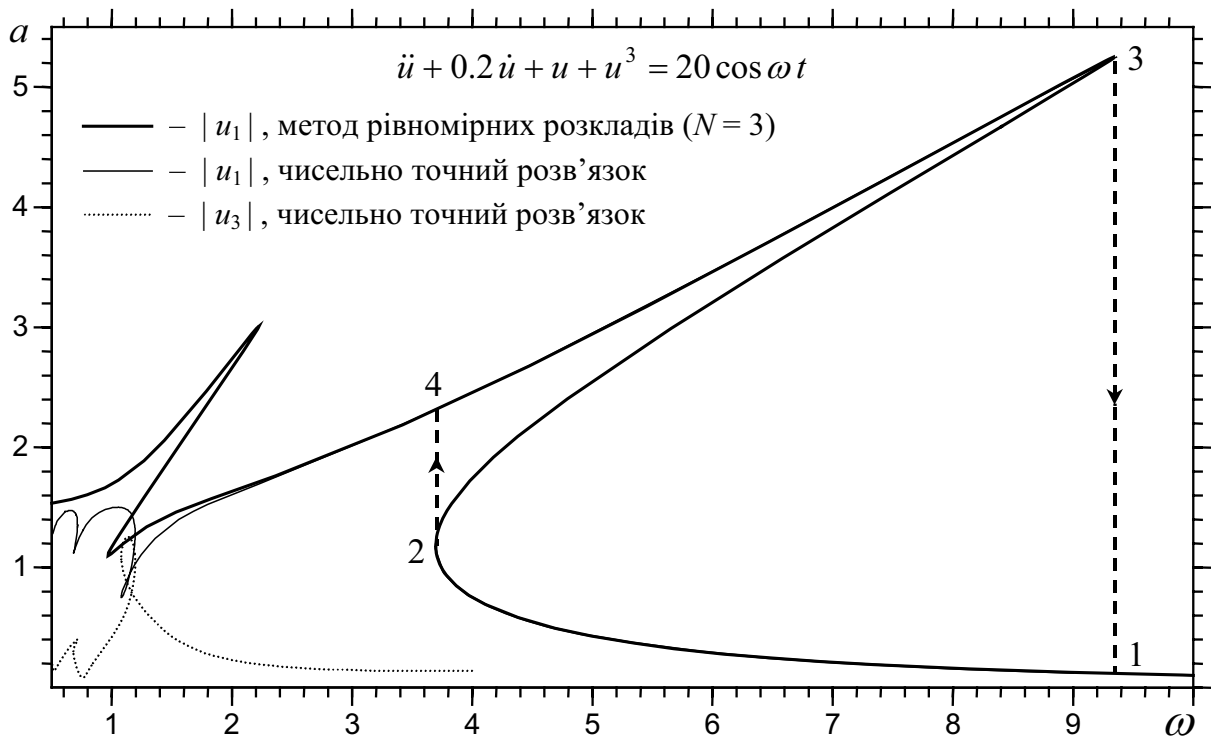


Рис. 1. Основний резонанс, гістерезис та супергармонічні резонанси у вимушеному рівнянні Дюффінга ($a \equiv |u_1|$ — амплітуда першої гармоніки; $|u_3|$ — амплітуда третьої гармоніки; N — число гармонік, враховане в методі рівномірних розкладів, див. розділ 1.2.3; чисельно точний розв’язок: метод гармонічного балансу $N = 101$).

де F і ω — відповідно амплітуда і частота зовнішньої періодичної сили. Тут ми розглядаємо найпростіший випадок залежності сили тертя від швидкості — лінійну залежність: $F_{\text{тр}} = -g\dot{u}$, $g = \text{const}$ — коефіцієнт тертя. Частота коливань обумовлюється частотою насадки ω , а визначенню підлягає амплітуда вимушених коливань.

Спектр коливань в лінійному наближенні складається з єдиної частоти, рівної зовнішній частоті ω . При певних значеннях ω амплітуда лінійних коливань різко зростає. Це явище називається *основним резонансом*. На відміну від лінійного випадку, коли амплітудно-частотна залежність однозначна, нелінійність призводить до *неоднозначності* розв’язку, що проявляється в явищі гістерезису. *Гістерезис* — різка зміна характеристик системи при

плавній зміні керуючого параметру (наприклад, частоти накачки ω). Рисунок 1 показує явище гістерезису для рівняння Дюффінга в області основного резонансу ($\omega \gtrsim 2$). При зменшенні частоти ω зовнішньої сили зі стану 1 до стану 2 відбувається перекид 2–4 системи на іншу гілку розв’язку. При цьому амплітуда коливань різко зростає. Навпаки, при збільшенні частоти зі стану 4 до стану 3 відбувається перекид 3–1, який супроводжується різким зменшенням амплітуди коливань.

Гістерезис відбувається внаслідок того, що гілка 2–3 розв’язку є *нестійкою* — вона не реалізується на практиці. Такі нестійкі “гістерезисні” стани називатимемо *метастабільними*. При збільшенні частоти ω в точці 2 виникають дві гілки розв’язків: одна (2–1) — стійка, а друга (2–3) — нестійка (те ж саме відбувається в точці 3 при зменшенні частоти). Подібні якісні зміни поведінки динамічної системи називаються *біфуркаціями* (що перекладається з латині як “дві гілки”) [69, с. 159]. Біфуркація, коли одночасно виникають нові стійкий та нестійкий розв’язки (як це відбувається на рис. 1 в точках 2 і 3), називається *біфуркацією згину* (або *біфуркацією сідло-вузел*)¹ [69, с. 161–162]. Другий розповсюджений тип біфуркацій — це *біфуркація перекиду* (або *біфуркація вил*)², коли стійкий розв’язок втрачає свою стійкість, і при цьому збуджуються два нових стійких розв’язки [69, с. 162–164].

Нелінійність призводить до генерації кратних гармонік з частотами $n\omega$ — *супергармонік*. Відповідно мають місце явища *супергармонічних резонансів*, коли відбувається різке зростання амплітуди однієї з супергармонік. На рис. 1 супергармонічний резонанс третього порядку (третя гармоніка перевищує першу) відбувається в області частот $1 \lesssim \omega \lesssim 1.5$. При $0.75 \lesssim \omega \lesssim 1$ має місце супергар-

¹ fold or saddle-node bifurcation (англ.)

² flip or pitchfork bifurcation (англ.)

монічний резонанс п'ятого порядку (п'ята гармоніка перевищує першу) і так далі.

При певних значеннях керуючих параметрів можуть також збуджуватись *субгармоніки* на частотах ω/n (відповідно різке зростання субгармонік називається *субгармонічним резонансом*). Нові гармоніки можуть збуджуватись двома різними шляхами. Коли в точці біфуркації гармоніки мають нульову амплітуду, то збудження називається *м'яким*, а відповідна біфуркація — *суперкритичною* (або *неперервною*). Інакше, коли при переході через точку біфуркації стрибком виникають гармоніки скінченної амплітуди, збудження називається *жорстким*, а відповідна біфуркація — *субкритичною* (або *розривною*) [69, с. 160].

Оскільки рівняння (3) описує коливання системи під дією зовнішньої періодичної сили, його стаціонарні розв'язки не залежать від початкових умов $\{x_0, y_0\}$ (як це має місце у випадку вільних коливань). Початкові умови визначають лише те, який стаціонарний стан з усіх можливих обере осцилятор по закінченні перехідного руху (при $t \rightarrow \infty$). Зауважимо також, що не всі початкові умови ведуть до періодичного стаціонарного руху. Загалом у нелінійних системах існує три види просторово обмеженого стаціонарного руху: періодичний, квазіперіодичний та хаотичний [48]. Квазіперіодичний рух виникає в системах, де є дві або більше керуючих частот, відношення яких є ірраціональним числом. Це можуть бути (i) системи з багаточастотною накачкою або (ii) такі системи з одночастотною накачкою, що допускають граничні цикли (див. розділ 1.1.3). Системи виду (3) не допускають граничні цикли, тому квазіперіодичний рух в них неможливий. Таким чином, для рівняння (3) початкові умови можуть привести лише до періодичних або хаотичних коливань.

Хаотичні коливання (динамічний хаос) — це обмежений стоха-

стичний неперіодичний рух у детермінованих системах, що характеризується рядом визначальних ознак [7, 11]:

1. На малих часових масштабах (порівняних з періодом накачки) спектр хаотичного сигналу має шумоподібний вигляд.
2. Траєкторія хаотичного руху *суттєво залежить від початкових умов*. Відстань між двома траєкторіями збільшується згідно закону

$$\Delta r(t) = \Delta r|_{t=0} e^{\lambda(t) \cdot t}, \quad (4)$$

де величина $\lambda > 0$ називається *показником Ляпунова*. Нескінченно близькі початкові умови призводять до цілком різних траєкторій руху. Іншими словами, невизначеність (похибка) в початкових умовах експоненціально зростає з часом. Це призводить до втрати системою інформації про початкові умови. Питання накопичення чисельних помилок при розрахунку хаотичних траєкторій добре описані в роботі [64].

3. Хаотична динаміка зберігає строгий внутрішній порядок, що описується фрактальними структурами. Фрактальний об'єкт, що утворює хаотична система в фазовому просторі $\{u, \dot{u}\}$, називається *дивним (або хаотичним) атрактором*.

Динамічний хаос є джерелом невпорядкованого руху в повністю детермінованих системах. Це означає, що нелінійні диференціальні рівняння можуть мати обмежені неперіодичні розв'язки, що поведуть себе випадковим чином, хоча в рівняннях руху відсутні випадкові члени. Мабуть, найвідомішим прикладом хаотичного руху є турбулентність в рідинах. Турбулентність була відома задовго до того, як з'явилося поняття динамічного хаосу, і зараз переосмислюється з точки зору хаотичної динаміки [2]. Зрозуміло, що хаотичні режими є вкрай небажаними при роботі різноманітних коливальних механізмів, тому необхідні методи оцінки значень параметрів, при яких можливий хаотичний рух.

Найбільш розповсюдженим шляхом переходу до динамічного хаосу є нескінченна послідовність біфуркацій подвоєння періоду (збудження субгармонік вдвічі меншої частоти) [7, с. 64–65]. На сьогодні цей сценарій переходу до хаосу детально вивчений на прикладі дискретних відображень — значно простіших систем за диференціальні рівняння виду (3). Одновимірні відображення задаються ітераційним процесом

$$x_{n+1} = f(x_n; \mu), \quad (5)$$

де μ — керуючий параметр. Відображення з $f = \mu x_n(1 - x_n)$ називається *логістичним*. Для таких систем Фейгенбаум [22] (1978 р.) встановив універсальний закон переходу до хаосу. Пізніше з'ясувалось, що універсальність переходу до хаосу спостерігається для великої кількості інших систем (Фейгенбаум [23], 1980 р.). Нехай μ_n — послідовність значень керуючого параметра, коли відбуваються біфуркації подвоєння періоду. Відстань між послідовними біфуркаціями наближається до універсальної сталої

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4.6692016091\dots, \quad (6)$$

що називається *числом Фейгенбаума*. Стала δ має значення (6) для всіх одновимірних відображень $f(x)$ з одним, причому локально квадратичним, максимумом [69, с. 27]. Інакше δ може приймати й інші значення (див. <http://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html>). Для коливальних систем, що описуються диференціальними рівняннями другого порядку, аналіз переходу до хаосу вимагає значно більших обчислювальних ресурсів. На сьогодні вдається розрахувати лише кілька перших наближень до сталої δ . Зокрема, Ван Дурен [76] (1999 р.) проробив це для рівняння Дюффінга з двоямним потенціалом, одержавши $\delta \approx 4.66$. В роботі [26] для нелінійного осцилятора з вимушеною силою у вигляді дельта-функції від косинусоїди одержано

$\delta \approx 4.669$.

Кількісно відрізнити хаотичний рух від періодичного можна за знаком показника Ляпунова λ [7, с. 197–199]. Згідно означення (4) *локальним* показником Ляпунова є величина

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\Delta r(t + \Delta t)}{\Delta r(t)} \right). \quad (7)$$

Локальний показник Ляпунова змінюється з часом. Для кількісної ж характеристики регулярності/хаотичності руху використовується *глобальний* показник Ляпунова — усереднений за часом локальний показник [69, с. 105]:

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \frac{\Delta r(t_{n+1})}{\Delta r(t_n)}, \quad t_{n+1} - t_n = \Delta t. \quad (8)$$

При $\lambda < 0$ рух періодичний, а при $\lambda > 0$ — хаотичний. Значення λ відповідно визначає степінь регулярності/хаотичності руху. На основі формули (8) існує дуже простий метод чисельного обчислення показника Ляпунова [69, с. 116–117]:

1. У фазовому просторі обираються довільна початкова умова $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ та друга початкова умова $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}_0$, розташована на малій відстані $\Delta r_0 \equiv |\Delta \mathbf{r}_0|$ в довільному напрямі від першої. При машинній точності 10^{-16} як правило вистачає $\Delta r_0 = 10^{-10}$. Розпочинається цикл $n = 1$.
2. Через визначений проміжок часу Δt (наприклад, період вимушуючої сили) для кожної початкової умови визначаються положення системи $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n$ та $\mathbf{r} = \mathbf{r}_n + \Delta \mathbf{r}_n$.
3. Положення другої траєкторії змінюється з $\mathbf{r}_n + \Delta \mathbf{r}_n$ на $\mathbf{r}_n + (\Delta r_0 / \Delta r_n) \Delta \mathbf{r}_n$. Це є принциповий крок, що на початку кожної ітерації залишає другу орбіту на відстані Δr_0 від першої, але орієнтує її в напрямі максимального віддалення.

4. Величина $\ln(\Delta r_n / \Delta r_0)$ додається до поточного значення середнього (8), і цикл повертається до пункту 2. Розрахунок закінчується після того, як середнє з достатньою точністю застабілізується. Збіжність можна дещо покращити, якщо з середнього виключити деяке число початкових ітерацій, де орбіти ще не до кінця застабілізувались на аттракторі.

На завершення виокремимо деякі області фізики, де часто виникають задачі на вимушені коливання:

1. Нелінійна оптика. Генерація кратних гармонік у нелінійному кристалі під дією лазерного випромінювання обумовлена нелінійністю поляризації за напруженістю електричного поля [17, с. 1434]. При цьому найбільші інтенсивності кратних гармонік одержуються в областях супергармонічних резонансів.
2. Радіoeлектроніка. Коливання в електричному колі, що включає індуктивність з нелінійною кривою намагніченості сердечника [10, с. 131–145].
3. Гідродинаміка. Найбільш розповсюджений відгук рідинного резонатора [59], коли рідина коливається з власними модами, подібний до відгуку рівняння Дюффінга з вимушуючою силою.

1.1.3. Автоколивання. Дія джерела енергії на осциляторну систему може відігравати роль “від’ємного” тертя, що компенсує справжнє (додатнє) тертя, викликане дисипативними силами. Незатухаючі коливання, що при цьому можуть виникнути, називаються *автоколиваннями* [1, с. 21–22]. Під час автоколивань неперіодичне джерело енергії вимушує систему перейти до стану стаціонарного періодичного коливання. Цей стаціонарний стан називається *граничним циклом* і характеризується сталою амплітудою і фазою незалежно від початкових умов. Визначенню підлягають як частота, так і амплітуда граничного циклу, що ускладнює задачу

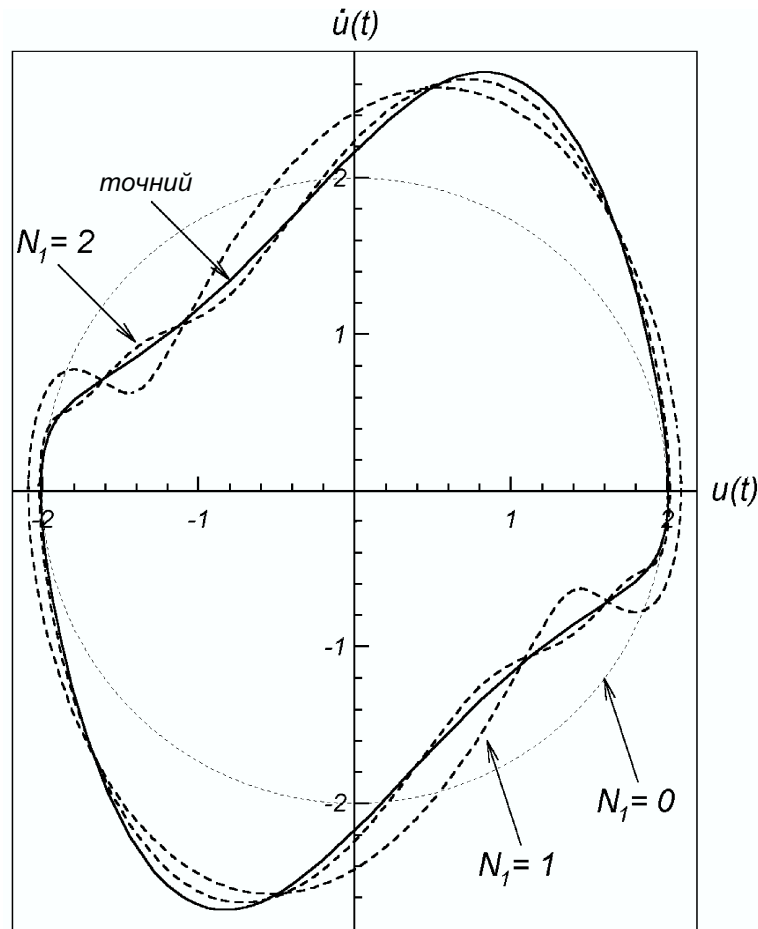


Рис. 2. Граничний цикл рівняння Ван дер Поля при $\varepsilon = 1$ ($N = 2N_1 + 1$ — число гармонік, враховане в методі рівномірних розкладів, розділ 1.2.3).

порівняно з вільними та вимушеними коливаннями, де один з цих параметрів (відповідно або амплітуда, або частота) відомі.

Для того, щоб бути автоколивальною, система має складатись з чотирьох підсистем: 1) осциляторна система; 2) джерело енергії; 3) додатній зворотній зв'язок, що забезпечує взаємодію між осциляторною системою та джерелом енергії, в результаті чого в осциляторній системі компенсуються втрати на тертя; 4) обмежувач амплітуди, що переводить коливання до стаціонарного стану. Обмежувач амплітуди має бути обов'язково нелінійним елементом. З цієї причини автоколивання завжди описуються нелінійними диференціальними рівняннями.

Автоколивання широко розповсюджені в природі, їх математич-

ні моделі вивчаються в різних галузях науки й техніки, зокрема:

1. Радіoeлектроніка. Коливання в ламповому генераторі описуються відомим рівнянням Ван дер Поля [1, с. 23–25]

$$\ddot{u} - \varepsilon(1 - u^2)\dot{u} + u = 0, \quad (9)$$

де u — безрозмірна напруга, ε — стала, що залежить від параметрів системи. Граничний цикл рівняння Ван дер Поля зображено на рис. 2.

2. Біологія та екологія. Модель хижак-жертва, що описує динаміку популяцій, у найпростішому випадку задається рівняннями Лотки-Вольтерра [62]

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = k_1 x_1 - k_2 x_1 x_2, \\ \ddot{x}_2 = k_2 x_1 x_2 - k_3 x_2, \end{cases}$$

де x_1 і x_2 — відповідно популяції жертв та хижаків.

3. Астрофізика. Модель радіальної пульсації зірок описується узагальненим рівнянням Ван дер Поля [13]

$$\ddot{y} + y = \frac{2\beta\varepsilon}{3} \left(y^2 + \dot{y}^2 + \frac{3}{2\beta}(1 - y^2)\dot{y} \right) + \frac{2\beta^2\varepsilon^2}{3} \left(\frac{7}{9}y^2 + \dot{y}^2 \right) y.$$

1.2. Методи дослідження нелінійних коливань

1.2.1. Теорія збурень. Розвинуто багато методів для пошуку наближених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. Більшість з них — це класичні методи теорії збурень, що застосовні лише до слабо нелінійних систем, де нелінійні члени малі порівняно з лінійними. Методи збурень включають метод Лінштедта-Пуанкаре, метод усереднення Крилова-Боголюбова-Митропольського (КБМ), метод багатьох масштабів тощо [1, 8]. Кожен з них характеризується розкладами невідомих змінних у степеневі ряди по малому параметру ε , що зазвичай пропорційний до нелінійного доданку в рівнянні руху:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(t) = u^{(0)}(t) + \varepsilon u^{(1)}(t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(t) + \dots \quad (10)$$

Ця процедура приводить до системи лінійних диференціальних рівнянь, що розв'язуються послідовно. Розв'язок $u^{(0)}(t)$ лінеаризованої задачі забезпечує початкове наближення для врахування малого збурення нелінійності, при цьому можливі різні підходи до знищення виникаючих секулярних членів. (Секулярні члени — це пропорційні до часу нефізичні доданки, що призводять до часової розбіжності теорії збурень.)

У методі багатьох масштабів рух системи розділяється на швидкий й повільний. Для цього вводяться незалежні часові масштаби, що визначають різні за швидкістю рухи системи, а саме:

$$T_0 \equiv t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t, \dots$$

Тоді час t вважається функцією цих часових масштабів, і оператор диференціювання розкладається в такий степеневий ряд:

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad D_n \equiv \frac{\partial}{\partial T_n}.$$

Розклад похідної є визначальним кроком методу багатьох масштабів, оскільки дозволяє знищити секулярні доданки в рівняннях збурень [8, с. 133–139]. Детальному аналізу методу багатьох масштабів присвячено зокрема роботи [36, 37].

У методі КБМ похідні амплітуди a першої гармоніки коливань і фази $\psi = \omega t + \phi$ також розкладаються в степеневі ряди додатково до розкладу (10):

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{cases} \quad (11)$$

Розклади (11) припускають, що амплітуда і фаза повільно змінюються з часом: $\dot{a} = O(\varepsilon)$, $\dot{\psi} = O(\varepsilon)$. Отже, вони можуть бути усе-

реднені за періодом коливань, звідки визначаються коефіцієнти A_n і B_n , та знищуються секулярності. Нещодавно було показано, що методи КБМ та багатьох масштабів еквівалентні [39].

Використання методів збурень зазвичай обмежене другим наближенням внаслідок їх громіздкості та відсутності регулярного алгоритму отримання вищих наближень. Один з шляхів узагальнення класичних слабо нелінійних методів для сильно нелінійних систем був запропонований в роботах [18, 19, 63]. Головна ідея — ввести новий параметр $\alpha(\varepsilon)$ замість параметра ε малої нелінійності так, щоб ряди збурень по параметру $\alpha(\varepsilon)$ збігались при будь-яких ε . Таким чином сильно нелінійна задача за параметром ε зводиться до слабо нелінійної задачі за параметром $\alpha(\varepsilon)$. У випадку рівняння Дюффінга з $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = \varepsilon$ параметр $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon a^2 / (1 + 3\varepsilon a^2)$, де a — амплітуда першої гармоніки [19]. Головним недоліком даного підходу є відсутність регулярного алгоритму знаходження параметру $\alpha(\varepsilon)$ в загальному випадку.

1.2.2. Метод гармонічного балансу. Для вивчення сильно нелінійних коливань мають застосовуватись методи іншої будови, ніж методи збурень. Метод гармонічного балансу мабуть є найбільш простим та ефективним підходом для розрахунку стаціонарних *періодичних* відгуків сильно нелінійних систем. Ознакою цього методу є те, що вигляд розв'язку задається *a priori*. Як приклад розглянемо вимушені коливання осцилятора з довільною поліноміальною нелінійністю і навантаженням на частоті ω :

$$\ddot{u} + g\dot{u} + \sum_{p=1}^P \alpha_p u^p = 2F \cos \omega t, \quad u(0) = x_0, \quad \dot{u}(0) = y_0; \quad (12)$$

де α_p , x_0 , y_0 — довільні дійсні сталі; g , F , ω — додатні дійсні сталі; $1 \leq P < \infty$.

Нехай $\bar{u}^{(0)}(t)$ — деякий стаціонарний періодичний розв'язок рів-

няння (12), що описує коливання, чий період рівний періоду зовнішньої сили $T = 2\pi/\omega$. Такі коливання називаються *супергармонічними* або *ультрагармонічними* [10, с. 146], оскільки окрім головної гармоніки на частоті накачки ω вони можуть містити лише гармоніки на частотах, що кратні ω , — супергармоніки. У методі гармонічного балансу цей розв’язок задається у вигляді *обрізаного ряду Фур’є*

$$\bar{u}^{(0)}(t) = \sum_{n=-N}^N \bar{u}_n^{(0)} e^{in\omega t}, \quad \bar{u}_{-n}^{(0)} \equiv \bar{u}_n^{(0)*}, \quad (13)$$

де N — номер найвищої гармоніки, що враховується в наближеному розв’язку; $(*)$ — комплексне спряження; риска згори означає, що розв’язок стаціонарний — в цьому випадку амплітуди його гармонік не залежать від часу.

Після підстановки розкладу (13) в рівняння руху (12) одержимо систему нелінійних *алгебраїчних* рівнянь для невідомих коефіцієнтів $\bar{u}_n^{(0)}$:

$$f_n(\omega) \bar{u}_n^{(0)} + \sum_{p=1}^P \alpha_p (\bar{u}^{(0)p})_n = F \delta_{|n|,1}, \quad |n| = \overline{0, N}, \quad (14)$$

де $f_n(\omega) = -n^2\omega^2 + i g n \omega$,

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases} \quad (15)$$

є дельтою Кронекера. Система рівнянь (14) розв’язується чисельно, наприклад, методом Ньютона. При цьому рівняння та невідомі зручніше розділити на дійсну та уявну частини.

Коефіцієнти $(\bar{u}^{(0)p})_n$ рекурентно виражаються через коефіцієнти $\bar{u}_n^{(0)}$, використовуючи наступні співвідношення. Нехай функції $u(t)$ і $v(t)$, що мають однаковий період, та їх добуток апроксимуються такими обрізаними рядами Фур’є:

$$u(t) = \sum_{n=-N_u}^{N_u} u_n e^{in\omega t}; \quad v(t) = \sum_{n=-N_v}^{N_v} v_n e^{in\omega t};$$

$$u(t) \cdot v(t) = \sum_{n=-(N_u+N_v)}^{N_u+N_v} (uv)_n e^{in\omega t}.$$

Тоді коефіцієнти $(uv)_n$ виражаються через u_n і v_n , а саме:

$$u(t) \cdot v(t) = \sum_{n_1=-N_u}^{N_u} \sum_{n_2=-N_v}^{N_v} u_{n_1} v_{n_2} e^{i(n_1+n_2)\omega t} = \left| \begin{matrix} n_1+n_2=n \\ n_2=n-n_1 \end{matrix} \right| =$$

$$\sum_{n_1=-N_u}^{N_u} \sum_{n=n_1-N_v}^{n_1+N_v} u_{n_1} v_{n-n_1} e^{in\omega t} =$$

$$\sum_{n=-(N_u+N_v)}^{N_u+N_v} \left(\sum_{n_1=\max(-N_u, n-N_v)}^{\min(N_u, n+N_v)} u_{n_1} v_{n-n_1} \right) e^{in\omega t}.$$

При цьому суми переставляються за такою схемою:

$$\sum_{n_1=-N_u}^{N_u} \sum_{n=n_1-N_v}^{n_1+N_v} =$$

$$\sum_{n_1=-N_u}^{N_u} \sum_{n=-N_u-N_v}^{N_u+N_v} \theta((n_1+N_v)-n) \theta(n-(n_1-N_v)) =$$

$$\sum_{n=-N_u-N_v}^{N_u+N_v} \sum_{n_1=-N_u}^{N_u} \theta((n+N_v)-n_1) \theta(n_1-(n-N_v)) =$$

$$\sum_{n=-(N_u+N_v)}^{N_u+N_v} \sum_{n_1=\max(-N_u, n-N_v)}^{\min(N_u, n+N_v)}, \quad (16)$$

де

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (17)$$

є функцією Хевісайда. Отже,

$$(uv)_n = \sum_{n_1=\max(-N_u, n-N_v)}^{\min(N_u, n+N_v)} u_{n_1} v_{n-n_1}, \quad |n| \leq N_u + N_v. \quad (18)$$

Покладаючи $v \equiv u^{p-1}$, p — довільна ціла додатна степінь, одержимо рекурентні співвідношення для Фур'є коефіцієнтів функції u^p :

$$(u^p)_n = \sum_{n_1=\max(-N, n-(p-1)N)}^{\min(N, n+(p-1)N)} u_{n_1}(u^{p-1})_{n-n_1}, \quad |n| = \overline{0, pN}, \quad (19)$$

де $N = N_u$. Співвідношення (19) може бути переписане в явному вигляді:

$$(u^p)_n = \sum_{n_1=N_1^-}^{N_1^+} u_{n-n_1} \dots \sum_{n_i=N_i^-}^{N_i^+} u_{n_{i-1}-n_i} \dots \sum_{n_{p-1}=N_{p-1}^-}^{N_{p-1}^+} u_{n_{p-2}-n_{p-1}} u_{n_{p-1}}, \quad |n| = \overline{0, pN}; \quad (20)$$

$$N_i^- = \max(n_{i-1} - N, -(p-i)N), \quad N_i^+ = \min(n_{i-1} + N, (p-i)N).$$

Якщо ряд Фур'є записувати через тригонометричні функції, а не комплексні експоненти, то відповідні формули для Фур'є коефіцієнтів добутку двох функцій (які стають значно більш громіздкими) одержав Льюнг [47] (1991 р.). Зауважимо також, що замість рекурентних формул (19) для розрахунку Фур'є гармонік функцій u^p через гармоніки функції u можна використати швидке перетворення Фур'є, як це роблять ряд авторів [16, 77].

Система рівнянь (14) при $N \rightarrow \infty$ еквівалентна диференціальному рівнянню (12), в класі періодичних неперервних розв'язків з головною гармонікою на частоті ω (з періодом T). Чим більше число врахованих гармонік, тим вища точність апроксимації гармонічного балансу. Збіжність методу гарантується теоремою Вейєрштрасса [55]: нехай $u(t)$ — неперервна періодична функція з періодом T , тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon)$ і відповідний йому тригонометричний поліном

$$u(t, N(\varepsilon)) = a_0 + \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{T} t + b_k \sin \frac{2\pi k}{T} t \right),$$

що

$$|u(t) - u(t, N(\varepsilon))| < \varepsilon.$$

Більш того, якщо періодичний розв'язок — неперервна функція, для якої визначені всі похідні в кожній точці інтервалу $[0, T]$, то коефіцієнти ряду (13) задовольняють умові [55, 56]:

$$|u_n| < M\theta^n, \quad M > 0, \quad 0 < \theta < 1, \quad (21)$$

тобто верхні межі для амплітуд Фур'є гармонік поліноміально спадають з ростом номера гармоніки. Проте, це не означає, що амплітуди гармонік спадають монотонно. Для того, щоб амплітуди гармонік спадали монотонно, необхідне виконання додаткової умови

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Такі розв'язки називатимемо *квазігармонічними*, оскільки перша гармоніка в них домінуюча. (Для порівняння: розв'язки, в яких головна гармоніка переважає вищі гармоніки настільки, що останніми можна знехтувати, називаються *гармонічними* [10, с. 131] — вони містять лише одну гармоніку.) В областях резонансів умова (22) може порушуватись, а саме амплітуда однієї або кількох вищих гармонік можуть перевищувати амплітуду першої гармоніки.

Метод гармонічного балансу відкриває зовсім іншу парадигму вивчення вимушених коливальних процесів, ніж звичайні часово-різницеві чисельні методи, такі як методи Рунге-Кутта, Адамса тощо (порівняльний аналіз різних чисельних методів проведено в роботі [66]). Часово-різницеві методи дозволяють для кожної початкової умови $\{x_0, y_0\}$ знайти один стаціонарний розв'язок рівняння руху (12), при цьому можна виявити лише *стійкі* розв'язки. Для знаходження всіх можливих стаціонарних розв'язків потріб-

но перебрати величезну кількість різних початкових умов $\{x_0, y_0\}$, кожен раз чекаючи, поки закінчатся перехідні процеси, і система вийде на стаціонарне коливання. Окрім незручності перебору різних початкових умов, головна технічна проблема — накопичення з часом чисельних похибок, особливо навколо границь хаотичного руху. Це все значно зменшує шанси знаходження всіх можливих стаціонарних розв’язків при заданих значеннях параметрів. Ситуація з методом гармонічного балансу протилежна. Спочатку знаходяться всі можливі стаціонарні розв’язки (як *стійкі*, так і *нестійкі*), а лише потім розраховуються початкові умови, необхідні для реалізації кожного зі стійких розв’язків. Нестійкі розв’язки використовуються для біфуркаційного аналізу. Це значно спрощує вивчення можливих коливальних рухів системи. Зауважимо, що нестійкі розв’язки можна одержувати і в межах іншого підходу — методу стрільби [61, 76].

Одним з недоліків методу гармонічного балансу є те, що розклад (13) не несе інформацію про сингулярності в точному розв’язку. Це призводить до того, що навколо особливих точок коефіцієнти Фур’є з ростом свого номера спадають дуже повільно, і для одержання достатньої чисельної точності необхідно враховувати занадто велике для практичних розрахунків число гармонік. Тому в роботі [54] був запропонований узагальнений метод гармонічного балансу!гармонічного балансу!узагальнений. Ідея узагальнення полягає в тому, що періодичний розв’язок шукається у вигляді Паде-апроксимації з рядами Фур’є в чисельнику і знаменнику. Тоді рівність нулю знаменника дає інформацію про виникнення сингулярностей в точному розв’язку. Проте розрахунки за цією схемою виявляються занадто громіздкими для широкого практичного використання.

1.2.3. Метод рівномірних розкладів. Процес розв’язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (14) методу гармонічного балансу ускладнюється тією обставиною, що немає загального методу пошуку всіх коренів таких систем рівнянь. Найбільш розповсюдженими чисельними методами є ітераційні (методи Ньютона, січних тощо). Для того, щоб здійснити ітераційний процес, необхідно задати початкове наближення розв’язку. При цьому завчасно не відомо, чи ітерації взагалі збігатимуться до якогось розв’язку, і якщо так, то до якого з усіх можливих розв’язків.

З огляду на це зручніше мати справу з одним рівнянням великого степеня (для якого вибір початкової умови значно спрощується), ніж з системою багатьох рівнянь. Запропонований авторами [49, 50] метод рівномірних розкладів метод!рівномірних розкладів дозволяє звести рівняння гармонічного балансу до одного алгебраїчного рівняння. Головною ідеєю є використати умову (22) того, що амплітуди гармонік квазігармонічного розв’язку монотонно спадають з ростом свого номера. Це дозволяє використати відношення амплітуд вищих гармонік до амплітуди основної першої гармоніки як формальний малий параметр:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_1|} \equiv |v_{n+1}| \sim \varepsilon^n, \quad \frac{|u_{2n+1}|}{|u_1|} \equiv |v_{2n+1}| \sim \varepsilon^{2n}. \quad (23)$$

Параметр ε вводиться лише для того, щоб згрупувати доданки однакового порядку. Такі параметри називаються формальними і в остаточних рівняннях покладаються рівними одиниці. Метод рівномірних розкладів дозволяє будувати наближені стаціонарні періодичні розв’язки у вигляді збіжних рядів у всій області, де такі розв’язки існують, і справджується умова квазігармонічності (22), незалежно від величини нелінійності. Саме це і означає термін “рівномірний”.

Подальша процедура така. Коефіцієнти u_n та $(u^p)_n$ розклада-

ються в степеневий ряд за формальним параметром ε . Якщо розв'язок $u(t)$ містить лише непарні гармоніки, то відповідні розклади в термінах віднормованої функції $v(t) = u(t)/a$, $a \equiv |u_1|$, мають вигляд

$$v_{2n+1} = v_1^{2n+1} \sum_{k=n}^{N_1} v_{2n+1, k-n} \varepsilon^{2k} = \varepsilon^{2n} v_1^{2n+1} (v_{2n+1, 0} + v_{2n+1, 1} \varepsilon^2 + \dots), \quad v_{1, k} = \delta_{k, 0}, \quad (24)$$

$$(v^{2p+1})_{2n+1} = v_1^{2n+1} \sum_{k=\max(0, n-p)}^{N_1} (v^{2p+1})_{2n+1, p-n+k} \varepsilon^{2k}, \quad (25)$$

де $2N_1 + 1 = N$. Вирази $(v^{2p+1})_{2n+1, p-n+k}$ є поліномами за коефіцієнтами $v_{2l+1, k'-l}$, відповідні рекурентні формули представлені в роботі [50].

Після підстановки розкладів (24), (25) у систему рівнянь гармонічного балансу (14), перегруповання порядку сумування та прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε^{2k} до нуля одержується система *лінійних* рівнянь для послідовного знаходження всіх коефіцієнтів $v_{2n+1, k-n}$. При цьому нелінійним залишається лише одне рівняння для знаходження амплітуди a першої гармоніки. Для рівняння Дюффінга ($P = 3$, $\alpha_2 = 0$) з $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ це рівняння при $N_1 = 1$ має вигляд

$$a^2 \left((g\omega)^2 \left(1 + \frac{9a^4}{(3g\omega)^2 + \beta^2} \right)^2 + \left(\omega^2 - 1 - 3a^2 + \frac{3a^4\beta}{(3g\omega)^2 + \beta^2} \right)^2 \right) = F^2, \quad (26)$$

де $\beta = (1 - 9\omega^2 + 6a^2)$. При фіксованих g і F рівняння (26) легко розв'язується чисельно, тим самим одержується амплітудно-частотна залежність $a(\omega)$. Її зображено на рис. 1. Для порівняння також наведено чисельно точний розв'язок, одержаний методом гармонічного балансу при $N_1 = 50$ (максимальна відносна похиб-

ка, формула (68), складає $10^{-9}\%$ при $\omega = 0.5$). Видно, що метод рівномірних розкладів навіть при $N_1 = 1$ добре збігається з чисельно точним розв'язком при $\omega > 2$, тобто в області основного резонансу.

З іншого боку, з рис. 1 можна бачити, що метод рівномірних розкладів невірно відтворює область $\omega < 2$, де має місце третій супергармонічний резонанс. Це пов'язано з тим, що в області третього супергармонічного резонансу амплітуда третьої гармоніки перевищує амплітуду першої гармоніки, і умова квазігармонічності (22) не виконується. Тому в цій області третю гармоніку не можна розкласти в ряд за формальним параметром ε . Отже, для того, щоб узагальнити метод на випадок супергармонічних резонансів, рівномірний розклад має проводитись для всіх гармонік, окрім резонансної. Тоді система гармонічного балансу зведеться до системи двох рівнянь — для першої та резонансної гармонік. Для випадку третього супергармонічного резонансу таке узагальнення проведене авторами в роботі [25]. Третій супергармонічний резонанс рівняння Дюффінга, розрахований узагальненим методом рівномірних розкладів, зображено на рис. 3. Зауважимо, що хоча неузагальнений метод рівномірних розкладів і не застосовний до розрахунку супергармонічного резонансу, він надає цінну інформацію про те, при яких значеннях параметрів системи цей резонанс має місце (див. рис. 1).

У випадку вільних коливань ($g = F = 0$) залежність $\omega^2(a)$ одержується в явному вигляді для довільних a . Зокрема, частотний розклад для математичного маятника ($P_1 = \infty$, $\alpha_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}$) в другому наближенні ($N_1 = 1$) має вигляд [50]:

$$\omega^2 = \frac{J_1(2a)}{a} + \frac{J_3(2a)(J_2(2a) - J_4(2a))}{9J_1(2a) - a(J_0(2a) - J_6(2a))}, \quad (27)$$

де J_n — функція Бесселя n -ого порядку. Для порівняння наведемо

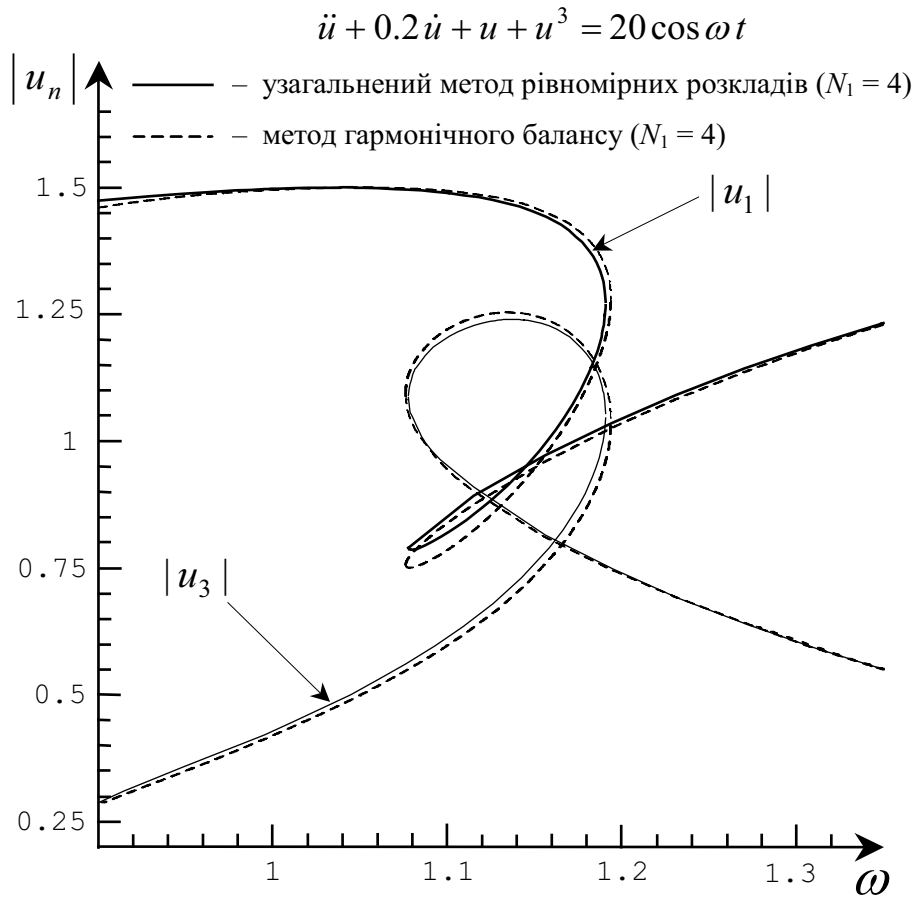


Рис. 3. Третій супергармонічний резонанс рівняння Дюффінга.

друге наближення методу КБМ [1, с. 64]:

$$\omega_{II}^2 = \omega_I^2 + \frac{2}{\omega_I^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n J_{2n+1}(2a)}{(2n+1)^2 - 1}, \quad \omega_I^2 = \frac{J_1(2a)}{a}. \quad (28)$$

Вираз (27) показує, що рівномірний розклад є дробово-раціональною апроксимацією типу Паде. Ось чому метод може застосовуватись до сильно нелінійних систем. Більш того, навіть у випадку слабо нелінійного математичного маятника чисельне порівняння виразів (27) та (28) свідчить про велику перевагу методу рівномірних розкладів [50].

Рівномірні розклади застосовні також до автоколивань [52]. Відповідний розрахунок граничного циклу рівняння Ван дер Поля наведено на рис. 2.

1.2.4. Метод гармонічного балансу. Субгармонічні коливання. При певних значеннях параметрів рівняння руху (12) допускає розв'язки з періодами в m разів більшими за період накачки, m — натуральне число. Такі розв'язки називаються *субгармонічними* порядку m , оскільки містять субгармоніки ω/m . Вони часто виникають як результат нестійкості супергармонічних розв'язків. Розглянемо загальну схему дослідження субгармонічних коливань методом гармонічного балансу.

Нехай стаціонарний розв'язок $\bar{u}^{(0)}(t)$, представлений розкладом (13), відомий. Функцію $\bar{u}^{(0)}(t)$ надалі називатимемо *розв'язком нульового рівня*. Він задовольняє диференціальне рівняння

$$\ddot{\bar{u}}^{(0)} + g\dot{\bar{u}}^{(0)} + \sum_{p=1}^P \alpha_p \bar{u}^{(0)p} = 2F \cos \omega t. \quad (29)$$

Нехай $u(t)$ — деякий інший, не обов'язково стаціонарний, розв'язок рівняння (12). Позначимо відхилення цього розв'язку від розв'язку нульового рівня як $v(t)$:

$$u(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + v(t). \quad (30)$$

Підстановка розв'язку (30) в початкове рівняння руху (12), враховуючи рівняння (29), приводить до неоднорідного нелінійного диференціального рівняння для відхилення $v(t)$:

$$\ddot{v} + g\dot{v} + \sum_{p=1}^P \left(\alpha_p + \beta_p^{(0)}(t) \right) v^p = 0, \quad (31)$$

де

$$\beta_p^{(0)}(t) = \sum_{p_1=1}^{P-p} C_{p+p_1}^p \alpha_{p+p_1} \bar{u}^{(0)p_1}(t), \quad \beta_P^{(0)}(t) \equiv 0, \quad (32)$$

$C_{p+p_1}^p$ — біноміальні коефіцієнти.

Нехай $v^{(1)}(t; m)$ — субгармонічний розв'язок рівняння (31) з періодом mT , m — просте число ($m = 2, 3, 5, 7, \dots$), T — період

накачки. Тоді функція

$$u^{(1)}(t; m) = \bar{u}^{(0)}(t) + v^{(1)}(t; m) \quad (33)$$

є розв'язком початкового рівняння (12). Такий розв'язок називатимемо *розв'язком першого рівня*.

Обмежуючись смугою частот $N\omega$, як у розкладі (13), відхилення $v^{(1)}(t; m)$ задаємо таким обрізаним рядом Фур'є:

$$v^{(1)}(t; m) = \sum_{n=-mN}^{mN} v_{\frac{n}{m}}^{(1)}(t) e^{i\frac{n}{m}\omega t}, \quad v_{-\frac{n}{m}}^{(1)}(t) \equiv v_{\frac{n}{m}}^{(1)*}(t). \quad (34)$$

Цілі степені v^p функції v також задаються у вигляді обрізаних рядів Фур'є:

$$v^p(t; m) = \sum_{n=-mpN}^{mpN} (v^p)_{\frac{n}{m}} e^{i\frac{n}{m}\omega t}, \quad p = \overline{1, P}. \quad (35)$$

Коефіцієнти $(v^p)_{\frac{n}{m}}$ рекурентно виражаються через коефіцієнти $v_{\frac{n}{m}}^{(1)}$:

$$(v^p)_{\frac{n}{m}} = \sum_{n_1=\max(-(p-1)mN, n-mN)}^{\min((p-1)mN, n+mN)} (v^{p-1})_{\frac{n_1}{m}} v_{\frac{n-n_1}{m}}, \quad |n| = \overline{0, mpN}. \quad (36)$$

Підстановка розкладів (34) і (35) в рівняння (31) приводить до системи диференціальних рівнянь для коефіцієнтів $v_{\frac{n}{m}}^{(1)}(t)$:

$$\ddot{v}_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} + \left(2i\frac{n}{m}\omega + g\right) \dot{v}_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} + \sum_{n_1=N_n^-(1; m)}^{N_n^+(1; m)} \left(\left(f_{\frac{n_1}{m}} + \alpha_1\right) \delta_{n, n_1} + \beta_{1, \frac{n-n_1}{m}}^{(l_0)} \right) v_{\frac{n_1}{m}}^{(l_1)} + \quad (37)$$

$$\sum_{p=2}^P \sum_{n_1=N_n^-(p; m)}^{N_n^+(p; m)} \left(\alpha_p \delta_{n, n_1} + \beta_{p, \frac{n-n_1}{m}}^{(l_0)} \right) (v^{(l_1)p})_{\frac{n_1}{m}} = 0, \quad |n| = \overline{0, mN};$$

$$\beta_{p, \frac{n}{m}}^{(l_0)} = \sum_{p_1=1}^{P-p} \alpha_{p+p_1} C_{p+p_1}^p (\bar{u}^{(l_0)p_1})_{\frac{n}{m}}, \quad p = \overline{1, P-1}; \quad \beta_{P, \frac{n}{m}}^{(l_0)} \equiv 0; \quad (38)$$

$$f_{\frac{n}{m}} = -\left(\frac{n\omega}{m}\right)^2 + ig\frac{n\omega}{m};$$

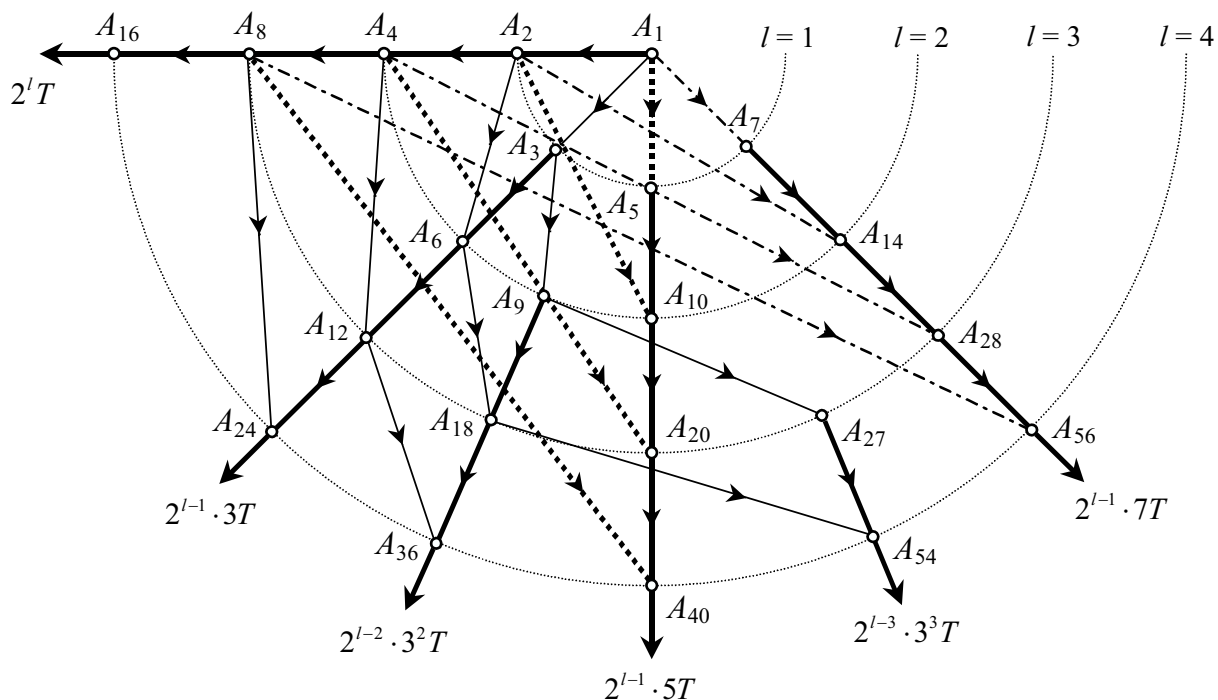


Рис. 4. Діаграма каскадів субгармонічних станів. Стани, що містять субгармоніки порядку m зображено точками A_m . —: подвоєння періоду; —: потроєння періоду;: множення періоду в п'ять разів; -·-·-·: множення періоду в сім разів.

$$N_n^-(p; m) = \max(-mpN, n - m(P - p)N),$$

$$N_n^+(p; m) = \min(mpN, n + m(P - p)N);$$

де в нашому випадку $l_0 = 0$ і $l_1 = 1$. Оскільки розв'язок нульового рівня містить лише цілі гармоніки, то $\beta_{p, \frac{n}{m}}^{(0)} = 0$, якщо n не кратне m . Рівняння (37) з n кратними m описують реакцію розв'язку нульового рівня на збудження субгармонік порядку m . Для стаціонарних розв'язків коефіцієнти $v_{\frac{n}{m}}^{(1)}$ не залежать від часу, і система (37) перетворюється на систему алгебраїчних рівнянь.

Використаємо описаний принцип побудови стаціонарних розв'язків нульового та першого рівнів для знаходження стаціонарних розв'язків наступних рівнів. Діаграму багаторівневих каскадів субгармонічних станів зображено на рис. 4. Точка A_1 в центрі кіл відповідає розв'язку нульового рівня $\bar{u}^{(0)}(t)$. Його спектр містить лише цілі гармоніки з головною частотою ω . Розв'яз-

ки першого рівня $\bar{u}^{(1)}(t; m)$ з періодом mT , m — просте число ($m = 2, 3, 5, 7, \dots$), розташовані на першому колі й представлені точками A_m . Далі, кожен з станів першого рівня A_m може бути розглянутий подібно до стану нульового рівня A_1 для одержання станів другого рівня, кратність яких є добутком двох простих чисел. Такі стаціонарні стани розташовані на другому колі. Аналогічно, стаціонарні стани, кратність яких є добутком трьох простих чисел, розташовані на третьому колі, і так далі. В такий спосіб можна відслідкувати всі можливі стаціонарні розв'язки рівняння руху. Схема не є однозначною. Наприклад, стан другого рівня A_6 можна одержати двома шляхами: $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_6$ або $A_1 \rightarrow A_3 \rightarrow A_6$.

Отже, нехай відомий стаціонарний розв'язок $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ рівня l_0 з періодом m_0T , m_0 є добутком l_0 простих чисел. Тоді стаціонарний розв'язок $\bar{u}^{(l_1)}(t; m)$ наступного рівня $l_1 = l_0 + 1$ з періодом mT ($m = m_0 r$, де r — просте число) шукається як відхилення від розв'язку $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$:

$$\bar{u}^{(l_1)}(t; m) = \bar{u}^{(l_0)}(t; m_0) + \bar{v}^{(l_1)}(t; m). \quad (39)$$

Гармоніки відхилення $\bar{v}^{(l_1)}(t; m)$ (під “гармоніками” надалі розумітимемо як гармоніки з цілими індексами, так і субгармоніки з дробовими індексами) знаходяться з системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, що є стаціонарною версією системи (37):

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=N_n^-(1; m)}^{N_n^+(1; m)} \left(\left(f_{\frac{n_1}{m}} + \alpha_1 \right) \delta_{n, n_1} + \beta_{1, \frac{n-n_1}{m}}^{(l_0)} \right) \bar{v}_{\frac{n_1}{m}}^{(l_1)} + \\ & \sum_{p=2}^P \sum_{n_1=N_n^-(p; m)}^{N_n^+(p; m)} \left(\alpha_p \delta_{n, n_1} + \beta_{p, \frac{n-n_1}{m}}^{(l_0)} \right) (\bar{v}^{(l_1)})_{\frac{n_1}{m}}^p = 0, \quad |n| = \overline{0, mN}; \end{aligned} \quad (40)$$

Коефіцієнти $\beta_{p, \frac{n}{m}}^{(l_0)}$ відмінні від нуля тільки, якщо n кратне r , оскільки $m = m_0 r$, і визначаються формулою (38).

1.2.5. Стійкість стаціонарних періодичних розв'язків. Теорія Флоке. Для аналізу стійкості стаціонарного періодичного розв'язку $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ рівняння (12) використовується лінеаризована версія рівняння (31) (куди замість розв'язку нульового рівня можна підставити будь-який інший стаціонарний розв'язок) для нескінченно малої варіації $v(t)$ розв'язку $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$:

$$\ddot{v} + g\dot{v} + \beta(t)v = 0, \quad \beta(t) = \beta(t + T_0) = \alpha_1 + \beta_1^{(l_0)}(t), \quad (41)$$

де $T_0 = 2\pi m_0 / \omega$ — період стаціонарного розв'язку. Рівняння (41) називається *варіаційним*. Його подальший аналіз оснований на *теорії Флоке* [24] (1883 р.) для лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Викладемо цю теорію, слідуючи Уїттекеру і Ватсону [9, с. 267–269] та Хаясі [10, с. 97–102].

Для зручності в рівнянні (41) зробимо заміну

$$v(t) \equiv \exp\left(-\frac{gt}{2}\right) \eta(t), \quad (42)$$

що дозволяє позбутися доданку з першою похідною, а саме

$$\ddot{\eta} + \left(\beta(t) - \frac{g^2}{4}\right) \eta = 0. \quad (43)$$

Нехай $\eta_1(t)$ та $\eta_2(t)$ — два лінійно-незалежні частинні розв'язки (не обов'язково дійсні) рівняння (43). Тоді будь-який інший розв'язок $\eta(t)$ є їх лінійною комбінацією:

$$\eta(t) = C_1 \eta_1(t) + C_2 \eta_2(t),$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. Внаслідок періодичності $\eta_1(t + T_0)$ і $\eta_2(t + T_0)$ — також розв'язки, отже

$$\begin{aligned} \eta_1(t + T_0) &= C_{11} \eta_1(t) + C_{12} \eta_2(t), \\ \eta_2(t + T_0) &= C_{21} \eta_1(t) + C_{22} \eta_2(t), \end{aligned} \quad (44)$$

де $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ — сталі, що залежать від виду розв'язків $\eta_1(t)$ та $\eta_2(t)$. Тоді

$$\eta(t + T_0) = (C_1 \cdot C_{11} + C_2 \cdot C_{21}) \eta_1(t) + (C_2 \cdot C_{22} + C_1 \cdot C_{12}) \eta_2(t).$$

Якщо можна обрати

$$\begin{cases} C_1 \cdot C_{11} + C_2 \cdot C_{21} = k C_1, \\ C_2 \cdot C_{22} + C_1 \cdot C_{12} = k C_2, \end{cases} \quad (45)$$

то існує такий частинний розв'язок рівняння (43), що

$$\eta(t + T_0) = k \eta(t). \quad (46)$$

Число k називається *характеристичним множником*. Зробимо заміну

$$k = e^{\mu T_0}, \quad \phi(t) = e^{-\mu t} \eta(t). \quad (47)$$

Число μ (в загальному випадку комплексне) називається *характеристичним показником*. Внаслідок умови (46)

$$\phi(t + T_0) = e^{-\mu t - \mu T_0} \eta(t + T_0) = e^{-\mu t} \eta(t) = \phi(t),$$

тобто $\phi(t)$ — періодична функція з періодом T_0 .

Отже, якщо рівняння (45) мають розв'язок, то існує частинний розв'язок рівняння (43), що має вигляд

$$\eta(t) = e^{\mu t} \phi(t), \quad \phi(t + T_0) = \phi(t). \quad (48)$$

Відповідний розв'язок варіаційного рівняння (41) такий:

$$v(t) = e^{(\mu - \frac{g}{2})t} \phi(t) \equiv e^{i\Omega t} \phi(t), \quad \phi(t + T_0) = \phi(t), \quad (49)$$

де величина

$$\Omega = i \left(\frac{g}{2} - \mu \right) \quad (50)$$

називається *характеристичною частотою*. Вираз (49) є головним результатом теорії Флоке і називається теоремою Флоке. Стаціонарний розв'язок $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ *стійкий*, якщо його флуктуації $v(t)$ затухають з часом, тобто $\text{Im} \Omega > 0$ ($\text{Re}(\mu - \frac{g}{2}) < 0$). У протилежному випадку $\text{Im} \Omega < 0$ стаціонарний розв'язок *нестійкий*.

Система рівнянь (45) має розв'язок, якщо її визначник рівний нулю, а саме

$$\begin{vmatrix} C_{11} - k & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (51)$$

Знайдемо, які розв'язки відносно k може мати рівняння (51). Нехай деякі розв'язки $\eta_1(t)$ та $\eta_2(t)$ рівняння (43) задовольняють початковим умовам

$$\begin{aligned} \eta_1(0) &= 1, \quad \dot{\eta}_1(0) = 0; \\ \eta_2(0) &= 0, \quad \dot{\eta}_2(0) = 1. \end{aligned} \quad (52)$$

Оскільки рівняння (43) та початкові умови (52) дійсні, то і функції $\eta_1(t)$ та $\eta_2(t)$ також дійсні. Вронскіан цих функцій

$$W(t) = \begin{vmatrix} \eta_1(t) & \eta_2(t) \\ \dot{\eta}_1(t) & \dot{\eta}_2(t) \end{vmatrix} = W(0) = 1 \neq 0, \quad (53)$$

як це впливає з формули Остроградського-Ліувіля [12, с. 106], враховуючи те, що коефіцієнт при $\dot{\eta}$ в рівнянні (43) рівний нулю. Отже, розв'язки $\eta_1(t)$ та $\eta_2(t)$, що задовольняють умовам (52), лінійно-незалежні й можуть бути обрані в якості фундаментальної системи розв'язків. Тоді з рівнянь (44) маємо

$$\begin{aligned} \eta_1(T_0) &= C_{11}, \quad \dot{\eta}_1(T_0) = C_{12}; \\ \eta_2(T_0) &= C_{21}, \quad \dot{\eta}_2(T_0) = C_{22}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $W(T_0) = 1$, рівняння (53), одержуємо

$$\eta_1(T_0) \dot{\eta}_2(T_0) - \dot{\eta}_1(T_0) \eta_2(T_0) = C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21} = 1.$$

Тоді рівняння (51) для k набуває вигляду

$$k^2 - (\eta_1(T_0) + \dot{\eta}_2(T_0)) k + 1 = 0. \quad (54)$$

З теореми Вієтта для квадратного рівняння (54) маємо

1. Якщо k — розв'язок, то k^{-1} — другий розв'язок. Відповідно, якщо μ — характеристичний показник, то $-\mu$ є другим характеристичним показником. Тоді загальний розв'язок рівняння (43) записується як

$$\eta(t) = C_1 e^{\mu t} \phi(t) + C_2 e^{-\mu t} \psi(t),$$

де $\phi(t + T_0) = \phi(t)$, $\psi(t + T_0) = \psi(t)$ — періодичні функції.

2. Величини

$$k + k^{-1} = \eta_1(T_0) + \dot{\eta}_2(T_0) \Leftrightarrow \operatorname{ch} \mu T_0 = \frac{1}{2}(\eta_1(T_0) + \dot{\eta}_2(T_0))$$

дійсні, оскільки η_1 та η_2 , що задовольняють умовам (52), — дійсні функції.

Розглянемо, які значення при цьому може приймати комплексний характеристичний показник $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, де μ_1 і μ_2 — дійсні числа. Величина

$$\operatorname{ch} \mu T_0 = \cos \mu_2 T_0 \operatorname{ch} \mu_1 T_0 + i \sin \mu_2 T_0 \operatorname{sh} \mu_1 T_0$$

є дійсною лише за виконання однієї з трьох умов:

(i) μ — уявне, тобто $\mu_1 = 0$. Тоді

$$\operatorname{Im} \Omega = \frac{g}{2}, \quad \operatorname{Re} \Omega = \mu_2,$$

і розв'язок $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ стійкий ($g > 0$);

(ii) μ — дійсне, тобто $\mu_2 = 0$. Тоді

$$\operatorname{Im} \Omega = \frac{g}{2} - \mu_1, \quad \operatorname{Re} \Omega = 0.$$

Розв'язок $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ нестійкий, якщо $\operatorname{Im} \Omega < 0$. При цьому співвідношення $\operatorname{Re} \Omega = 0$ свідчить про те, що нестійкий розв'язок *метастабільний* (він не реалізується на практиці, а його нестійкість не призводить до збудження іншого розв'язку);

(iii) μ — комплексне, але $\sin \mu_2 T_0 = 0 \Leftrightarrow \mu_2 = n\pi/T_0$, де n — ціле число. Тоді

$$\operatorname{Im} \Omega = \frac{g}{2} - \mu_1, \quad \operatorname{Re} \Omega = \frac{n\pi}{T_0} = \frac{n\omega}{2m_0}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язок $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ нестійкий, якщо $\operatorname{Im} \Omega < 0$. При цьому залежно від значення $\operatorname{Re} \Omega$ можливі два варіанти:

(iiia) n — непарне. Це є нестійкість відносно *подвоєння періоду*;

(iiiб) n — парне. Нестійкість не змінює період розв'язку, а свідчить про збудження нових гармонік на частоті $\omega/m_0 + \operatorname{Re} \Omega = 2k\omega/m_0$, $k \in \mathbb{Z}$ — парних гармонік (у даній формулі до частоти стаціонарного розв'язку ω/m_0 додається нестійка частота $\operatorname{Re} \Omega$). Такі нестійкості відбуваються з розв'язками, що містять лише непарні гармоніки (на фазовій площині ці розв'язки симетричні відносно початку координат). При збудженні парних гармонік розв'язок втрачає симетрію. Тому нестійкість з парним n називається нестійкістю *руйнування симетрії*.

Часто замість характеристичної частоти (або показника) використовують характеристичний множник $q \equiv \exp(iT \operatorname{Re} \Omega)$ (див., наприклад, [16, 20]). Для нестійкостей подвоєння періоду $q = -1$, а для нестійкостей руйнування симетрії $q = +1$. Згадаємо також роботу [73], де теорію Флоке викладено в матричній формі.

У випадку комплексних μ частинний розв'язок (49) варіаційного рівняння має вигляд

$$v(t) = e^{-(\operatorname{Im} \Omega)t} \exp\left(\frac{i\pi n}{T_0} t\right) \phi(t), \quad \phi(t + T_0) = \phi(t). \quad (55)$$

Функція $\exp\left(\frac{i\pi n}{T_0} t\right)$ має період T_0 або $2T_0$ залежно від парності n . Якщо цей множник включити в функцію $\phi(t)$, то остання також матиме період T_0 або $2T_0$. Отже, якщо в частинному розв'язку (49) вважати, що функція $\phi(t)$ окрім періоду T_0 може мати період $2T_0$, то випадок з комплексними μ зведеться до випадку (ii) з дійсними μ . Для цього у варіацію $v(t)$ необхідно включати гармоніки на частотах $\omega/(2m_0)$, які не містить стаціонарний розв'язок $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$.

На цьому виклад теорії Флоке завершимо. Зауважимо, що теорія Флоке не допускає жодної можливості, іншої від випадків (i)–(iii). Отже, лінійний аналіз на стійкість, яким є теорія Флоке, не спроможний відслідкувати біфуркації множення періоду *непарного* порядку. Зважаючи на те, що теорія Флоке розглядає ли-

ше нескінченно малі варіації стаціонарних розв'язків, приходимо до такого висновку. Для систем виду (12) збудження *субгармонік непарного порядку* очікуємо завжди *жорстким*, тобто амплітуди субгармонік, що збуджуються в точці біфуркації, мають одразу ненульове значення.

1.2.6. Метод гармонічного балансу. Стійкість розв'язків. Використовуючи результати теорії Флоке, в межах методу гармонічного балансу авторами побудовано загальну послідовну схему дослідження стаціонарних розв'язків на стійкість [51]. Нехай $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ — стаціонарний періодичний розв'язок, який потрібно дослідити на стійкість. Розглянемо варіацію цього розв'язку $v^{(l_1)}(t)$ ($l_1 = l_0 + 1$), яка містить субгармоніки $v_{\frac{n}{m}}^{(l_1)}(t)$ порядку $m = m_0$. При цьому розв'язок Флоке (49), записаний окремо для кожної з гармонік, має вигляд

$$v_{\frac{n}{m_0}}^{(l_1)}(t) = v_{\frac{n}{m_0}}^{(l_1)} \exp(i\Omega t), \quad |n| = \overline{0, m_0 N}; \quad (56)$$

де $v_{n/m_0}^{(l_1)}$ — коефіцієнти Фур'є періодичної функції $\phi(t)$. Лінеаризація диференціальних рівнянь (37) для коефіцієнтів $v_{n/m}^{(l_1)}(t)$ ($m = m_0$), враховуючи вирази (56), приводить до системи $2m_0 N + 1$ однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left(-\left(\frac{n}{m_0} \omega + \Omega \right)^2 + i g \left(\frac{n}{m_0} \omega + \Omega \right) + \alpha_1 \right) v_{\frac{n}{m_0}}^{(l_1)} + \sum_{n_1=N_n^-(1; m_0)}^{N_n^+(1; m_0)} \beta_{1, \frac{n-n_1}{m_0}}^{(l_0)} v_{\frac{n_1}{m_0}}^{(l_1)} = 0, \quad |n| = \overline{0, m_0 N}; \quad (57)$$

де $l_1 = l_0 + 1$, коефіцієнти $\beta_{1, n/m_0}^{(l_0)}$ та межі сумування $N_n^\pm$ визначаються формулою (38). Характеристичні частоти Ω знаходяться з умови рівності нулю визначника цієї системи рівнянь.

Стаціонарний розв'язок $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ нестійкий, якщо уявна частина якоїсь з характеристичних частот Ω_n ($n = \overline{1, 2m_0 N + 1}$) вия-

вється від'ємною відповідно до випадків (ii) та (iii) теорії Флоке. Дана схема дозволяє встановити всі види нестійкостей, включаючи нестійкості подвоєння періоду та руйнування симетрії, використовуючи варіації лише тих гармонік, що містяться в стаціонарному розв'язку. Зауважимо, що нестійкість руйнування симетрії можлива лише у випадку, коли стаціонарний розв'язок містить тільки непарні гармоніки. Для цього m_0 має бути непарним, $\beta_{1, n/m_0}^{(l_0)} \neq 0$ лише для непарних n , і система (57) міститиме тільки рівняння з непарними n . Тоді нестійкості подвоєння періоду має передувати нестійкість руйнування симетрії.

При безпосередніх розрахунках обчислення визначника системи лінійних рівнянь (57) є чисельно неефективним. Значно більш ефективним є переформулювати цю систему у вигляді задачі на власні значення. Для цього систему диференціальних рівнянь (37) другого порядку спочатку потрібно звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку, ввівши нові змінні

$$w_{\frac{n}{m}}^{(l_1)}(t) \equiv \dot{v}_{\frac{n}{m}}^{(l_1)}(t).$$

Лінеаризація одержаної системи рівнянь першого порядку, враховуючи теорему Флоке

$$v_{\frac{n}{m}}^{(l_1)}(t) = v_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} \exp(i\Omega t), \quad w_{\frac{n}{m}}^{(l_1)}(t) = w_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} \exp(i\Omega t),$$

приводить до задачі на власні значення для $\lambda = -i\Omega$:

$$\begin{aligned} i\Omega v_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} - w_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} &= 0, \quad |n| = \overline{0}, mN, \\ \sum_{n_1=N_n^-(1; m)}^{N_n^+(1; m)} &\left(\left(f_{\frac{n_1}{m}} + \alpha_1 \right) \delta_{n, n_1} + \beta_{1, \frac{n-n_1}{m}}^{(l_0)} \right) v_{\frac{n_1}{m}}^{(l_1)} + \\ &\left(i\Omega + 2i \frac{n}{m} \omega + g \right) w_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} = 0, \quad |n| = \overline{0}, mN, \end{aligned} \quad (58)$$

де $m = m_0$ і $f_{n/m} = -(n/m)^2 \omega^2 + ig(n/m) \omega$.

При великих N і m пошук всіх власних значень системи (58)

також виявляється чисельно нереалізовною задачею. Але знаходити всі характеристичні частоти і не потрібно. Наприклад, для нестійкостей подвоєння періоду спектр характеристичних частот має вигляд

$$\Omega_n = \pm \frac{n\omega}{2m_0} - i\varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Число ε одне й те ж для всіх Ω_n . Тому для встановлення стійкості/нестійкості достатньо знайти лише одну характеристичну частоту Ω_n , наприклад, найменшу $n = 1$. Це можна зробити таким чином. Рівняння (57) є системою $2m_0N + 1$ *однорідних* рівнянь для $2m_0N + 2$ невідомих: $v_{n/m_0}^{(l_1)}$ ($|n| = \overline{0, N}$), відносно яких рівняння лінійні, та Ω , відносно якої рівняння нелінійні. Оскільки система однорідна, то одне з $v_{n/m_0}^{(l_1)}$ залишається довільним. Нехай це буде $v_0^{(l_1)}$. Віднормуємо кожне з рівнянь на $v_0^{(l_1)}$, ввівши нові змінні

$$V_{\frac{n}{m_0}} \equiv v_{\frac{n}{m_0}}^{(l_1)} / v_0^{(l_1)}.$$

Виключивши таким чином довільну змінну, одержимо нелінійне рівняння ($n = 0$) для визначення Ω :

$$-\Omega^2 + ig\Omega + C = 0, \quad (59)$$

$$C = \alpha_1 + f_0 + \beta_{1,0}^{(l_0)} + \sum'_{n_1=N_0^-(1;m_0)}^{N_0^+(1;m_0)} \beta_{1,-\frac{n_1}{m_0}}^{(l_0)} V_{\frac{n_1}{m_0}},$$

та систему $2m_0N$ лінійних *неоднорідних* рівнянь для змінних V_{n/m_0} :

$$\left(-\Omega^2 + \left(ig - 2\frac{n}{m_0} \omega \right) \Omega + \left(\alpha_1 + f_{\frac{n}{m_0}} \right) \right) V_{\frac{n}{m_0}} + \sum'_{n_1=N_n^-(1;m_0)}^{N_n^+(1;m_0)} \beta_{1,\frac{n-n_1}{m_0}}^{(l_0)} V_{\frac{n_1}{m_0}} = -\beta_{1,\frac{n}{m_0}}^{(l_0)}, \quad |n| = \overline{1, m_0N}; \quad (60)$$

де $\sum'$ означає суму за виключенням нульового індекса.

При заданій початковій умові $\Omega = \Omega^{(0)}$ рівняння (59) розв'язується методом Ньютона, при цьому на кожній ітерації додатково

розв'язується система лінійних рівнянь (60). Якщо Ω — розв'язок квадратного рівняння (59), то внаслідок теореми Вієтта величина $(ig - \Omega)$ — також розв'язок. Таким чином, рівняння (59) має два сімейства розв'язків, що містять всю необхідну інформацію про стійкість стаціонарного розв'язку:

$$\Omega_n^{(1)} = \pm \frac{n\omega}{2m_0} - i\varepsilon, \quad \Omega_n^{(2)} = \pm \frac{n\omega}{2m_0} + i(g + \varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (61)$$

Розв'язок нестійкий, якщо $\varepsilon > 0$ або $g + \varepsilon < 0$. При цьому непарні n свідчать про нестійкість подвоєння періоду, парні n ($n \neq 0$) — про нестійкість руйнування симетрії, а $n = 0$ — про метастабільний розв'язок.

1.2.7. Амплітудне виродження субгармонічних розв'язків.

Рівняння руху (12) допускає перетворення періодичності

$$u \rightarrow u, \quad t \rightarrow t + kT, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (62)$$

де $T = 2\pi/\omega$ — період накачки. Нехай $u(t; m)$ — деякий субгармонічний розв'язок з періодом mT ($m = 1$ відповідає ультрагармонічному розв'язку). Тоді внаслідок періодичності (62) рівняння руху допускає ціле сімейство m субгармонічних розв'язків однакового порядку:

$$u(t; m | k) = u(t + kT; m), \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (63)$$

Для всіх розв'язків у кожному сімействі гармоніки з однаковим номером мають однакові амплітуди, але різні фази:

$$u_{\frac{n}{m}}(t | k) = u_{\frac{n}{m}}(t | 0) e^{i2\pi kn/m}, \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (64)$$

Таким чином, субгармонічні розв'язки порядку m є m -кратно виродженими за амплітудою, незалежно від способу їх збудження.

Умова періодичності (62) надає чудовий метод дослідження вимушених коливань, використовуючи *перерізи Пуанкаре* (див., наприклад, [7, с. 56–64]). Положення розв'язку на фазовій площині

фіксується з часовим інтервалом довжиною T , починаючи з моменту $t = 0$. Побудований таким чином часовий переріз фазової площини (що і носить назву перерізу Пуанкаре) для стаціонарного періодичного розв'язку порядку m складається з m точок. Кожна з цих точок є початковою умовою для реалізації одного з розв'язків сімейства (63).

1.3. Регулярні та хаотичні вимушені коливання на прикладі осцилятора Дюффінга

Даний підрозділ присвяtimo конкретному прикладу вивчення вимушених коливань, що описуються рівнянням Дюффінга ($P = 3$, $\alpha_2 = 0$) з жорсткою нелінійністю:

$$\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 2F \cos \omega t. \quad (65)$$

При фіксованій амплітуді накачки $F = 20$ будемо досліджувати, як коливання залежать від зовнішньої частоти ω . Викладене далі дослідження було розпочате авторами в роботі [51].

Зауважимо, що вимушеним коливанням осцилятора Дюффінга присвячено чимало інших робіт. Проте більшість з них зосереджено на рівнянні з м'якою нелінійністю [41, 63, 75, 34, 20] або двоямним потенціалом [40, 58, 31, 21, 71, 60, 42, 35, 43, 16, 76]. Сюди ж можна віднести роботи [70, 44, 72, 45] по дослідженню рівняння (12), коли воно одночасно містить квадратичну і кубічну нелінійності ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$). Це рівняння зводиться до рівняння Дюффінга з $\alpha_2 = 0$, але з додатковим сталим членом у вимушуючій силі.

Рівнянню з жорсткою нелінійністю присвячено значно менше робіт. Можна згадати роботу Хассана і Бартонна [38], які досліджували супергармонічні резонанси третього і другого порядків у рівнянні (65) з $F = 10$. Випадок $F = 25$ розглядали Крюков та ін. [3]

(супергармонічні резонанси третього і другого порядків) та Крюков і Середович [4] (каскад подвоєння періоду $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_8$, результуючий хаотичний атрактор, а також жорстке збудження субгармонік $m = 3$). До рівнянь з жорсткою нелінійністю можна також віднести рівняння Дюффінга з нульовим лінійним членом ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 > 0$), для якого детальний чисельний аналіз хаотичних коливань провів Уеда [74] (1979 р.) (тому це рівняння часто називають його іменем). Деякі спроби аналітичного дослідження рівняння Уеди були пророблені в роботі [70], проте одержані результати занадто наближені для адекватного пояснення причин хаотичного руху. Супергармонічний резонанс третього порядку та субгармонічний резонанс порядку $\frac{1}{3}$ в рівнянні Уеди вивчався в роботі [63].

Складність рівнянь з жорсткою нелінійністю полягає в тому, що тут субгармонічні коливання виникають в області супергармонічних резонансів і тому вимагають значно більших чисельних зусиль, ніж у випадку осциляторів з м'якою нелінійністю або дво-ямним потенціалом, де субгармонічні коливання виникають вже в області основного резонансу [14, с. 454–456]. Саме тому для подальшого дослідження і обрано осцилятор з жорсткою нелінійністю.

1.3.1. Симетрія розв'язків рівняння руху з парним потенціалом. Рівняння руху (65) (і взагалі будь-яке рівняння (12) з парним потенціалом $V(u)$, $\alpha_{2p} = 0$) допускає таке перетворення симетрії:

$$u \rightarrow -u, \quad t \rightarrow t + \frac{T}{2} + kT, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (66)$$

де $T = 2\pi/\omega$. В цьому випадку для кожного субгармонічного розв'язку $u(t; m)$ взагалі існує два сімейства розв'язків: (63) та

$$\hat{u}(t; m | k) = -u(t + T/2 + kT; m), \quad k = \overline{0, m-1}. \quad (67)$$

Зауважимо, що сімейства $u(t; m|k)$ та $\hat{u}(t; m|k)$ представляють єдине сімейство, якщо розв'язок $u(t; m)$ симетричний, тобто

$$u(t; m) = -u(t + mT/2; m).$$

Для цього m має бути непарним, і розв'язок $u(t; m)$ має містити лише непарні гармоніки. Інакше розв'язок $u(t; m)$ несиметричний, і (67) приводить до нового сімейства розв'язків $\hat{u}(t; m|k)$, зсунутих по фазі відносно розв'язків сімейства $u(t; m|k)$. На фазовій площині симетричність розв'язку виражається в симетрії його фазового портрету відносно початку координат.

1.3.2. Супергармонічні резонанси. Найпростішим стаціонарним розв'язком рівняння (65) є симетричний ультрагармонічний розв'язок, який містить лише непарні гармоніки з головною частотою, що рівна частоті накачки ω (період коливань рівний періоду зовнішньої сили). Такий розв'язок нульового рівня позначатимемо як $\tilde{u}^{(0)}(t)$ (тильда означає, що розв'язок стаціонарний і містить лише непарні гармоніки). Для випадку $F = 10$ амплітудно-частотну залежність розв'язку $\tilde{u}^{(0)}(t)$ наведено на рис. 1, а область третього супергармонічного резонансу — на рис. 3.

Амплітудно-частотні залежності розв'язку $\tilde{u}^{(0)}(t)$ при $F = 20$ зображено на рис. 5. Розв'язок одержано методом гармонічного балансу при $N = 50$. Максимальна відносна похибка розв'язку

$$Er = \frac{1}{2F} \sup_t |\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 - 2F \cos \omega t| \quad (68)$$

при $N = 50$ складає $\approx 10^{-7}\%$. Цього достатньо для одержання всіх порогів нестійкості, що розглядатимуться далі, з абсолютною точністю 10^{-14} . В області 7–8 амплітуда третьої гармоніки перевищує амплітуду першої гармоніки. Це є третій супергармонічний резонанс. Ділянка розв'язку 7–8 нестійка з характеристичною частотою $\Omega = 0 - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, — це метастабільний роз-

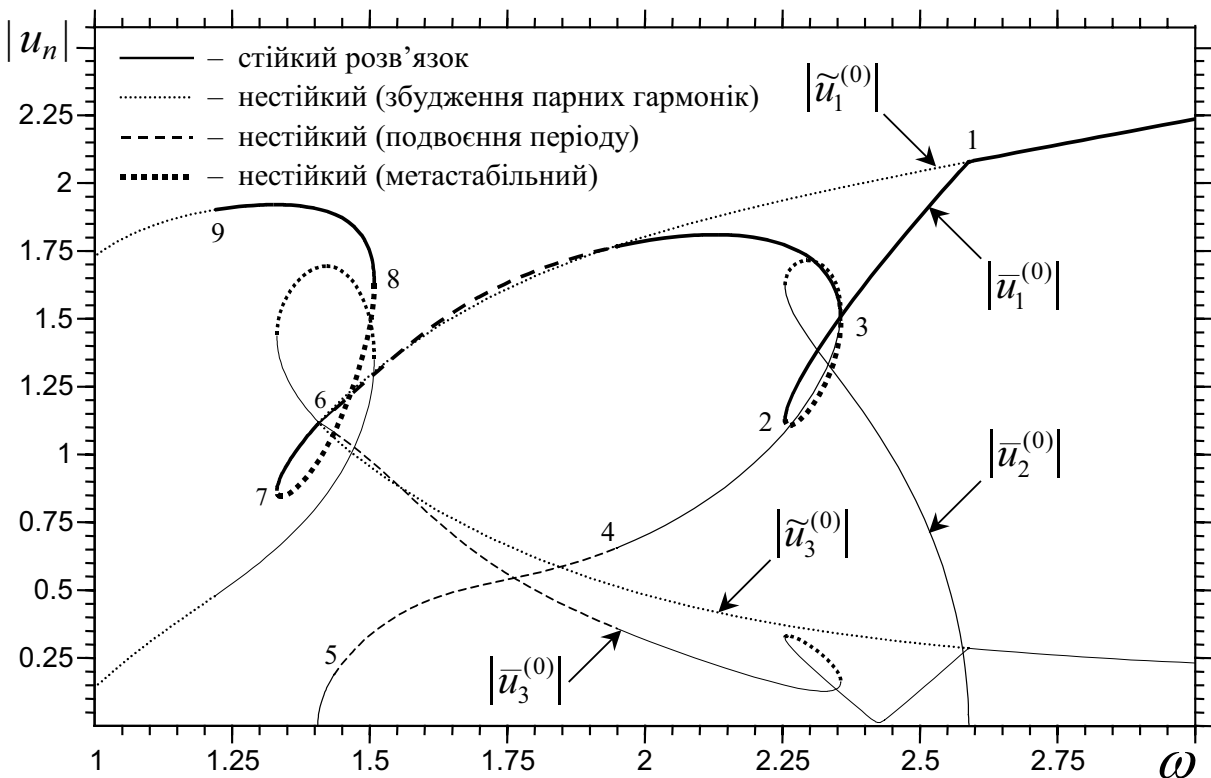


Рис. 5. Третій та другий супергармонічні резонанси у вимушеному рівнянні Дюффінга $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ (метод гармонічного балансу $N = 50$); “2”: $\omega = 2.254632$, “3”: $\omega = 2.355914$; “7”: $\omega = 1.331029$, “8”: $\omega = 1.508186$; “9”: $\omega = 1.2180617130628$; “1”: $\omega = 2.5882299235018$, “6”: $\omega = 1.4055253605896$; “4”: $\omega = 1.9494606578385$, “5”: $\omega = 1.4353185134997$.

в’язок. У вузькій смузі частот 6–1 між третім супергармонічним резонансом і основним резонансом розв’язок $\tilde{u}^{(0)}(t)$ стає нестійким внаслідок біфуркації руйнування симетрії. Відповідна характеристична частота $\Omega = \pm\omega - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вказує на те, що новий стаціонарний розв’язок має містити гармоніки на частотах $(2n - 1)\omega + \text{Re}\Omega = 2n\omega$, тобто парні гармоніки. Згідно класифікації, наведеної на рис. 4, такий розв’язок нульового рівня позначаємо як $\bar{u}^{(0)}(t)$.

Пороги збудження розв’язку $\bar{u}^{(0)}(t)$ в точності відповідають порогам нестійкості “1” і “6” розв’язку $\tilde{u}^{(0)}(t)$. З амплітудно-частотних залежностей розв’язку $\bar{u}^{(0)}(t)$, наведених на рис. 5, видно, що в області 2–3 амплітуда другої гармоніки перевищує амплі-

туду першої гармоніки. Це є другий супергармонічний резонанс. На ділянці 2–3 розв’язок метастабільний. В області 5–4 між третім та другим супергармонічними резонансами розв’язок $\bar{u}^{(0)}(t)$ стає нестійким внаслідок біфуркації подвоєння періоду. Відповідна характеристична частота $\Omega = \pm \frac{\omega}{2} - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вказує на те, що новий стаціонарний розв’язок має містити субгармоніки другого порядку.

Зауважимо, що смуга частот 1–6 — не єдина область, де збуджуються парні гармоніки. Наступна така смуга знаходиться між областями третього та п’ятого супергармонічних резонансів і розпочинається в точці “9”. Відповідно в області частот навколо $\omega \approx 1$ має місце четвертий супергармонічний резонанс.

1.3.3. Каскади подвоєння періоду та хаотичні коливання.

Кризи хаотичних атракторів. Нехай $\bar{u}^{(l_0)}(t; m_0)$ — деякий стаціонарний розв’язок рівня l_0 , що містить субгармоніки порядку m_0 . При певних значеннях параметрів рівняння цей розв’язок може стати нестійким відносно збудження субгармонік порядку $2m_0$ внаслідок біфуркації подвоєння періоду. Область нестійкості визначається з умови $\varepsilon > 0$ для характеристичних частот (61). В разі нестійкості наступний стаціонарний розв’язок $\bar{u}^{(l_1)}(t; 2m_0)$ ($l_1 = l_0 + 1$) у каскаді подвоєння періоду має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(l_1)}(t; 2m_0) &= \bar{u}^{(l_0)}(t; m_0) + \bar{v}^{(l_1)}(t; 2m_0) = \\ &= \sum_{n=-m_0N}^{m_0N} \left(\bar{u}_{\frac{n}{m_0}}^{(l_0)} + \bar{v}_{\frac{n}{m_0}}^{(l_1)} \right) e^{i \frac{n}{m_0} \omega t} + \sum_{n=-m_0N}^{m_0N-1} \bar{v}_{\frac{n}{m_0} + \frac{1}{2m_0}}^{(l_1)} e^{i \left(\frac{n}{m_0} + \frac{1}{2m_0} \right) \omega t} = \\ &= \sum_{n=-2m_0N}^{2m_0N} \bar{u}_{\frac{n}{2m_0}}^{(l_1)} e^{i \frac{n}{2m_0} \omega t}. \quad (69) \end{aligned}$$

Коефіцієнти $\bar{v}_{n/2m_0}^{(l_1)}$ ($|n| = \overline{0, 2m_0N}$) знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь (40).

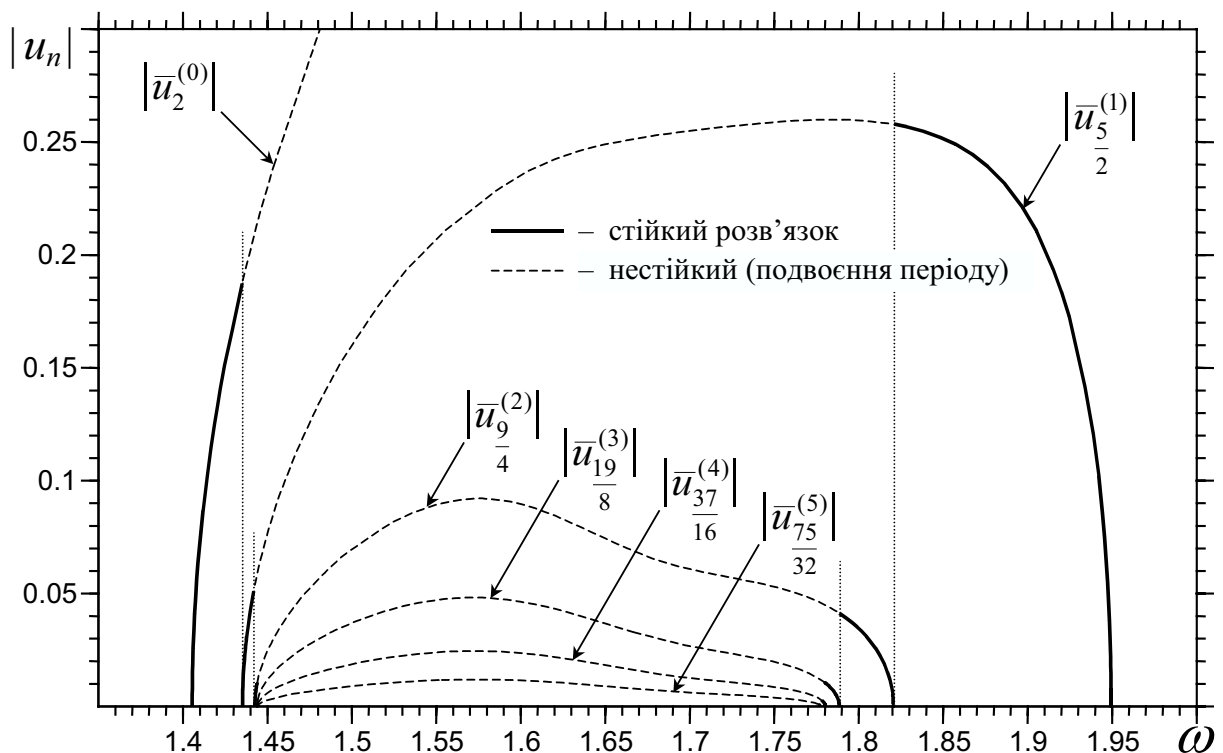


Рис. 6. Амплітудно-частотні залежності резонансних субгармонік у каскаді подвоєння періоду стаціонарних розв'язків рівняння $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ (метод гармонічного балансу $N = 50$).

Нестійкість стаціонарного розв'язку нульового рівня $\bar{u}^{(0)}(t)$ в області 4–5 на рис. 5 призводить до збудження стаціонарного розв'язку першого рівня $\bar{u}^{(1)}(t; 2)$, що містить субгармоніки другого порядку. Залежність амплітуди $|\bar{u}_{5/2}^{(1)}|$ від частоти ω зображено на рис. 6. Лівий ω_l та правий ω_r пороги збудження розв'язку $\bar{u}^{(1)}(t; 2)$ в точності відповідають порогам нестійкості розв'язку $\bar{u}^{(0)}(t)$. Субгармоніка $\frac{5}{2}$ має найбільшу амплітуду з усіх інших субгармонік. У такій ситуації говорять про *субгармонічний резонанс* порядку $\frac{5}{2}$.

Розв'язок $\bar{u}^{(1)}(t; 2)$ нестійкий відносно подальшого подвоєння періоду майже при всіх частотах, окрім невеликих смуг навколо порогів свого збудження. В області нестійкості розв'язку $\bar{u}^{(1)}(t; 2)$ збуджується стаціонарний розв'язок другого рівня $\bar{u}^{(2)}(t; 4)$, що містить субгармоніки четвертого порядку, і так далі. Таким чи-

Таблиця 2

Ліві $\omega_l^{(n)}$ та праві $\omega_r^{(n)}$ пороги нестійкостей у каскаді подвоєння періоду на рис. 6, ширини частотних смуг $\Delta\omega^{(n)} = \omega^{(n)} - \omega^{(n-1)}$ стійких розв'язків та їх відношення $\delta^{(n)} = \Delta\omega^{(n-1)} / \Delta\omega^{(n)}$

Біфуркація	n	$\omega_l^{(n)}$	$\Delta\omega_l^{(n)}$	$\delta^{(n)}$
$1T \rightarrow 2T$	1	1.4353185134997		
$2T \rightarrow 4T$	2	1.4425645048229	0.0072459913232	
$4T \rightarrow 8T$	3	1.4439127652460	0.0013482604231	5.374
$8T \rightarrow 16T$	4	1.4441969925243	0.0002842272783	4.744
$16T \rightarrow 32T$	5	1.4442582059436	0.0000612134193	4.643
$32T \rightarrow 64T$	6	1.4442713417160	0.0000131357724	4.660

Біфуркація	n	$\omega_r^{(n)}$	$\Delta\omega_r^{(n)}$	$\delta^{(n)}$
$1T \rightarrow 2T$	1	1.9494606578385		
$2T \rightarrow 4T$	2	1.8205235456734	-0.1289371121651	
$4T \rightarrow 8T$	3	1.7885178115691	-0.0320057341043	4.029
$8T \rightarrow 16T$	4	1.7802471852717	-0.0082706262974	3.870
$16T \rightarrow 32T$	5	1.7783484514327	-0.0018987338390	4.356
$32T \rightarrow 64T$	6	1.7779343550305	-0.0004140964022	4.585

ном одержується каскад $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_4 \rightarrow A_8 \rightarrow A_{16} \rightarrow A_{32} \rightarrow \dots$ подвоєння періоду. Відповідні амплітудно-частотні залежності резонансних субгармонік зображено на рис. 6. Видно, що збудження субгармонік у каскаді подвоєння періоду *м'яке*. Всі одержані розв'язки стійкі лише у вузьких частотних смугах навколо порогів збудження, при цьому ширина цих смуг зменшується з ростом m . Відношення ширин цих частотних смуг, розраховане в табл. 2, дає кілька перших наближень до числа Фейгенбаума (6).³

³Частину даних для табл. 2 та рис. 6 розрахував Салій Ростислав Ярославович під час виконання дипломної роботи магістра “Субгармонічні нестійкості та перехід до хаосу при вимушених коливаннях осцилятора Дюффінга з жорсткою нелінійністю” (Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 2004 р., наук. кер. Лукомський В.П.).

Таблиця 3

Точки згущення порогів збудження субгармонічних розв'язків у каскадах подвоєння періоду з табл. 2 згідно оцінок за формулою (70)

n	$\omega_l^{(\infty)}$	$\omega_r^{(\infty)}$
3	1.44422	1.77795
4	1.4442729	1.77737
5	1.4442750	1.77778
6	1.4442749	1.77782

Розрахунок субгармонічних розв'язків вищого порядку ускладнюється тією обставиною, що необхідно розв'язувати величезне число алгебраїчних рівнянь (при $m = 32$ та $N = 50$ — це 3201 дійсне рівняння). Проте з табл. 2 вже можна достатньо точно оцінити границю, до якої прямують пороги збудження субгармонічних розв'язків вищих порядків — *точку згущення*. Внаслідок співвідношення Фейгенбаума (6) ширини частотних смуг $\Delta\omega^{(n)}$ утворюють послідовність, близьку до геометричної прогресії зі знаменником δ^{-1} , причому чим вище n , тим з більшою точністю. Тому, використовуючи формулу суми геометричної прогресії і покладаючи на кожному кроці $\delta = \delta^{(n)}$, для точки згущення можна наближено записати

$$\omega^{(\infty)} \approx \omega^{(n)} + \frac{\Delta\omega^{(n)}}{\delta^{(n)} - 1}. \quad (70)$$

Значення, розраховані за цією формулою, представлено в табл. 3.

Таким чином, за умови, що каскад подвоєння періоду продовжуватиметься до нескінченності, субгармонічні розв'язки порядку $m = 2^n$, $n = \overline{1, \infty}$ є всі *нестійкими* при $\omega_l^{(\infty)} \lesssim \omega \lesssim \omega_r^{(\infty)}$. В цій області частот слід очікувати існування хаотичних атракторів. Зауважимо, що каскад подвоєння періоду може бути і скінченним, тоді в області збудження субгармонічних розв'язків хаотичні коливання не відбуватимуться. Так, при $F = 10$ збуджуються лише

субгармоніки порядку $m = 2$, які виявляються стійкими при всіх частотах [51]. У рівнянні існує поріг по F , коли каскад подвоєння періоду стає нескінченним, і мають місце хаотичні коливання.

Одержані результати підтверджується безпосереднім чисельним розв'язком рівняння (65), використовуючи метод Рунге-Кутта четвертого порядку. При цьому необхідні початкові умови забезпечуються розв'язками, одержаними методом гармонічного балансу. Це є значно більш ефективним, ніж простий перебір великого числа початкових умов для того, щоб потрапити в область притягання субгармонічного розв'язку. При цьому чим точніше задані початкові умови, тим менший час витрачається на перехідний нестационарний рух до того, як осцилятор застабілізується на стаціонарному розв'язку. Крок методу Рунге-Кутта обирався так, щоб абсолютна точність чисельного розв'язку не була меншою за 10^{-10} . Перерізи Пуанкаре одержаних стаціонарних чисельних розв'язків наведено на рис. 7 для каскаду, коли частота накачки збільшується від $\omega = 1.44$, та на рис. 8 для каскаду, коли частота накачки спадає від $\omega = 1.85$.

Внаслідок симетрії (66) рівняння руху завжди існує два різних сімейства несиметричних розв'язків: $u(t; m|k)$ та $\hat{u}(t; m|k)$, формули (63) та (67) відповідно. Тому субгармонічні розв'язки парного порядку (вони завжди несиметричні) на рис. 7 та 8 представлені двома різними перерізами (перерізи Пуанкаре розв'язків з одного й того ж сімейства однакові). Видно, що субгармонічні розв'язки другого порядку існують при $\omega = 1.44$ (рис. 7) та $\omega = 1.85$ (рис. 8). При збільшенні/зменшенні частоти ці розв'язки стають нестійкими, а збуджуються субгармонічні розв'язки з подвоєним періодом $4T$, які зображено при $\omega = 1.443$ та $\omega = 1.81$, при цьому кожна точка на початкових перерізах роздвоюється. Аналогічно утворюються субгармонічні розв'язки ще вищих порядків, перері-

зи яких зображено на рис. 7 та 8 при $\omega = 1.444$ та $\omega = 1.785$ (8-й порядок); $\omega = 1.4442$ та $\omega = 1.78$ (16-й порядок).

Після подальшого збільшення/зменшення частоти одержуються хаотичні атрактори, наведені при $\omega = 1.445$ (рис. 7) та $\omega = 1.77$ (рис. 8). Протягом часового інтервалу $\Delta t = 10^5 T$, для якого проводились обчислення, ці розв'язки неперіодичні. При цьому на кожній з вказаних частот внаслідок симетрії (66) рівняння руху існує два різних хаотичних атрактори, які мають несиметричні фазові портрети. Тому такі атрактори називатимемо *несиметричними*. Про те, що наведені розв'язки є дійсно хаотичними атракторами, а не субгармонічними розв'язками високого порядку $m = 2^n$, $n > 16$ ($2^n > 10^5$), свідчать значення показника Ляпунова, розрахованого за формулою (8) вказаним після неї методом. Так, для хаотичного атрактора при $\omega = 1.445$ одержано $\lambda = 0.066 \pm 0.002 > 0$ (довжина часового ряду при усередненні складала $\Delta t = 10^5 T$). Для порівняння субгармонічний розв'язок 4-ого порядку при $\omega = 1.443$ має $\lambda = -0.075 \pm 0.002$, субгармонічний розв'язок 8-ого порядку при $\omega = 1.444$ — $\lambda = -0.025 \pm 0.002$, субгармонічний розв'язок 16-ого порядку при $\omega = 1.4442$ — $\lambda = -0.0015 \pm 0.0002$. Появі кожного зі знайдених хаотичних атракторів має передувати нескінченна послідовність біфуркацій подвоєння періоду (якщо б ця послідовність зупинилась на деякому субгармонічному розв'язку високого порядку, який був би стійкий, то саме на нього, а не на хаотичний атрактор, вийшли би коливання).

Таким чином, при $\omega = 1.445 / \omega = 1.77$ існує нескінченне число нестійких субгармонічних розв'язків з періодами $2^n T$, $n = \overline{1, \infty}$. Саме це і є причиною такого “дивного” перерізу Пуанкаре, що утворює хаотичний атрактор. Система коливається поміж нескінченим числом нестійких періодичних орбіт і внаслідок їх нестійкості не може застабілізуватися на жодній з них. При цьому

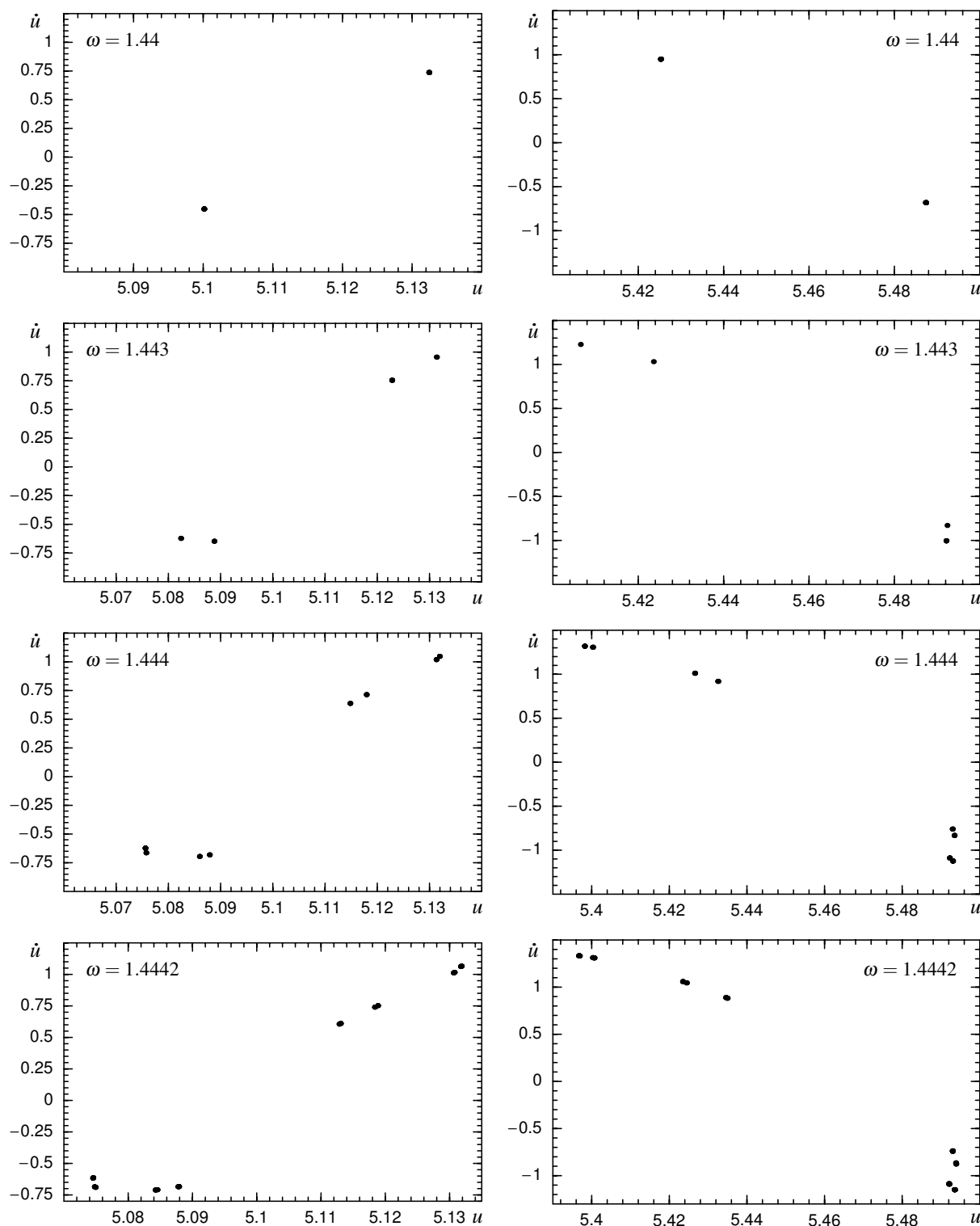
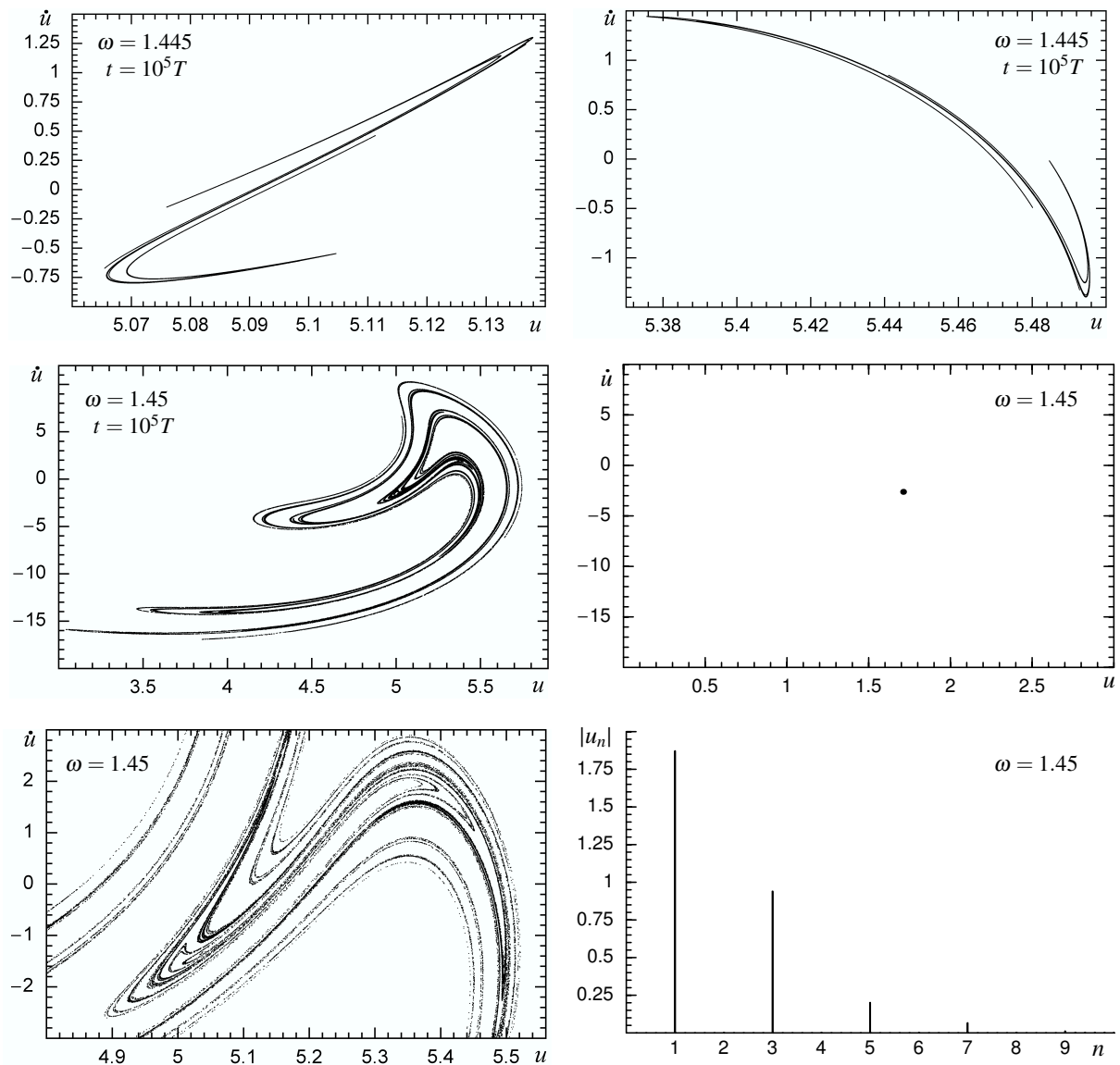


Рис. 7. Перший каскад подвоєння періоду (ліві пороги нестійкостей на рис. 6), що складається зі стаціонарних субгармонічних розв'язків порядку 2^n рівняння $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ і веде до хаотичного руху. Чисельні розв'язки одержано методом Рунге-Кутта четвертого порядку. Представлено такі перерізи Пуанкаре: $\omega = 1.44$ — $2T$ -розв'язки; $\omega = 1.443$ — $4T$ -розв'язки; $\omega = 1.444$ — $8T$ -розв'язки; $\omega = 1.4442$ — $16T$ -



розв'язки; $\omega = 1.445$ — несиметричні хаотичні атрактори. Перерізи з першого та другого стовпчиків відповідають двом різним сімействам несиметричних розв'язків (67), що зсунуті по фазі один відносно іншого, відповідні початкові умови — $u(0) = 5.075$; $\dot{u}(0) = -0.7$ та $u(0) = 5.49$; $\dot{u}(0) = -1$. Останні два перерізи в першому стовпчику представляють симетричний хаотичний атрактор при $\omega = 1.45$ та його збільшену частину, який утворюється внаслідок кризи, коли два несиметричні хаотичні атрактори об'єднуються в один при $1.4451 < \omega < 1.4452$. Останні два рисунки в другому стовпчику представляють переріз Пуанкаре та Фур'є спектр симетричного ультрагармонічного розв'язку, що співіснує з представленим хаотичним атрактором, відповідні початкові умови — $u(0) = 1.57$; $\dot{u}(0) = -2$.

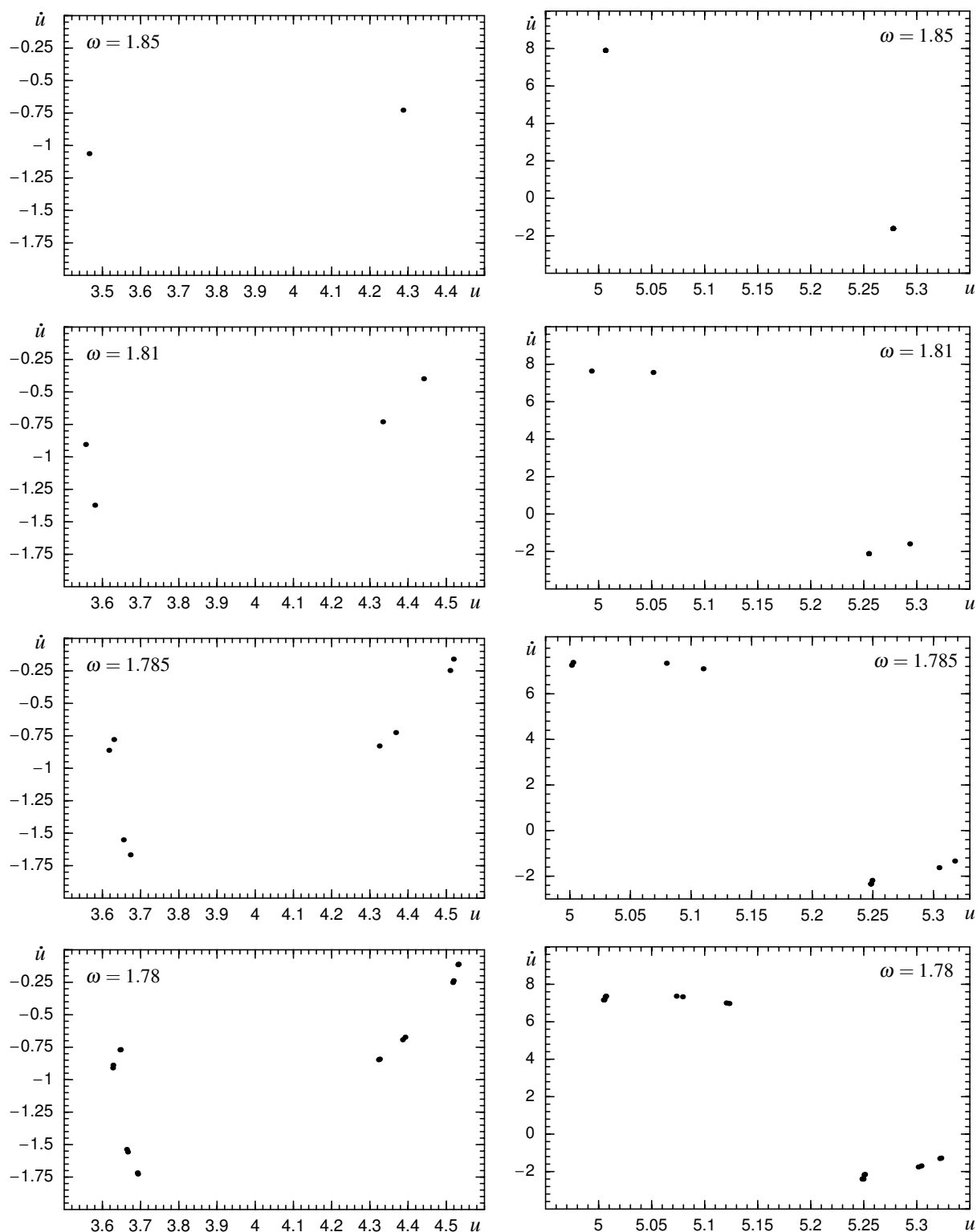
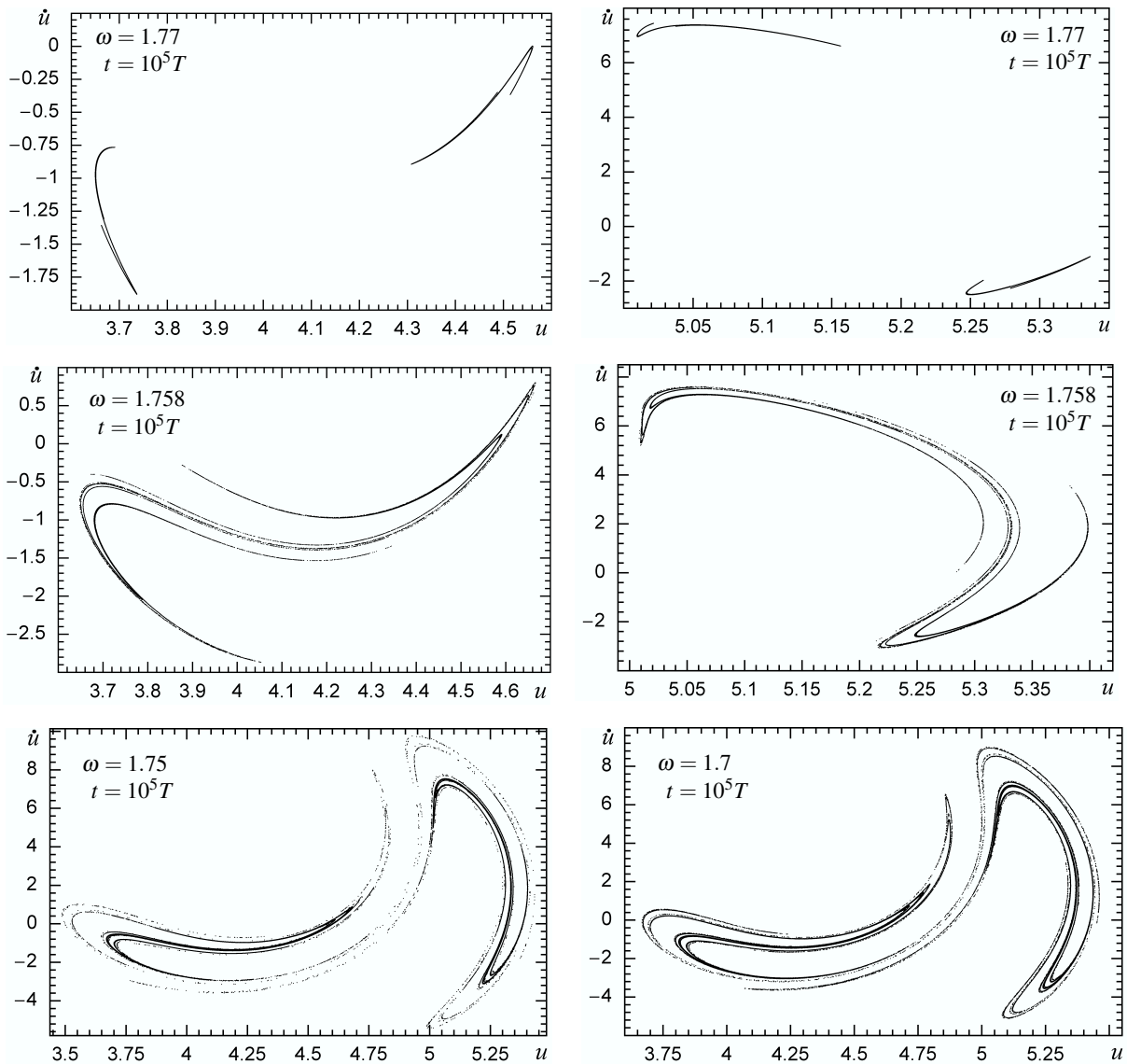


Рис. 8. Другий каскад подвоєння періоду (праві пороги нестійкостей на рис. 6), що складається зі стаціонарних субгармонічних розв'язків порядку 2^n рівняння $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40\cos\omega t$ і веде до хаотичного руху. Чисельні розв'язки одержано методом Рунге-Кутта четвертого порядку. Представлено такі перерізи Пуанкаре: $\omega = 1.85$ — $2T$ -розв'язки;



$\omega = 1.81$ — $4T$ -розв'язки; $\omega = 1.785$ — $8T$ -розв'язки; $\omega = 1.78$ — $16T$ -розв'язки; $\omega = 1.77$ — несиметричні хаотичні атрактори, кожний з яких складається з двох окремих дуг; $\omega = 1.758$ — несиметричні хаотичні атрактори, кожний з яких складається з однієї дуги (вони утворюються внаслідок кризи при $1.758 < \omega < 1.759$). Перерізи з першого та другого стовпчиків відповідають двом різним сімействам несиметричних розв'язків (67), що зсунуті по фазі один відносно іншого, відповідні початкові умови — $u(0) = 3.8$; $\dot{u}(0) = -0.7$ та $u(0) = 5.25$; $\dot{u}(0) = -2$. Два перерізи в останньому рядку представляють симетричні хаотичні атрактори при $\omega = 1.75$ та $\omega = 1.7$, що утворюються внаслідок кризи, коли два несиметричні хаотичні атрактори об'єднуються в один при $\omega \approx 1.755$.

хаотичний атрактор займає ту ж саму частину фазового простору, що і нестійкі субгармонічні орбіти, повторюючи їх контури. Демонстрацію цього факту наведено на рис. 9. Видно, що нестійка субгармонічна орбіта 16-ого порядку в точності знаходиться на хаотичних атракторах. Те ж саме стосується всіх інших нестійких орбіт порядку $m = 2^n$, $n = \overline{1, \infty}$. Про таку природу хаотичних атракторів говорять, що вони *щільно заповнені нестійкими періодичними орбітами*⁴ [69, с. 128, 146–147]. Кожна точка на хаотичному атракторі нескінченно близька до однієї з нестійких періодичних орбіт, але всі ці орбіти утворюють множину міри нуль. В термінах нестійких періодичних орбіт виражаються різноманітні статистичні та ергодичні характеристики атракторів [15, 32]. Існують різноманітні чисельні методи встановлення цих нестійких орбіт як у випадку, коли рівняння руху відоме, так і в більш складному випадку, коли задані лише експериментальні часові ряди [46, 67, 68, 65, 57]. Коли рівняння руху відоме, то порівняно з цими методами техніка гармонічного балансу надає значно більш простий і послідовний шлях встановлення нестійких періодичних орбіт, що підтверджує рис. 9.

При подальшому збільшенні частоти, починаючи з $\omega = 1.445$, обидва несиметричні хаотичні атрактори на рис. 7 після досягнення порогу при $1.4451 < \omega < 1.4452$ раптово утворюють єдиний атрактор (але при цьому їх перерізи не перетинаються), що займає значно більшу область у фазовому просторі. Переріз Пуанкаре такого атрактора наведено на рис. 7 при $\omega = 1.45$. Подібні явища раптової якісної зміни хаотичного атрактора називаються *кризами*. Цей термін ввели Гребоджі та ін. [27] (1982 р.) при вивченні хаотичних атракторів на прикладі логістичного відображення. Ширший аналіз криз атракторів у різних системах зроблено цими

⁴dense in unstable periodic orbits (англ.)

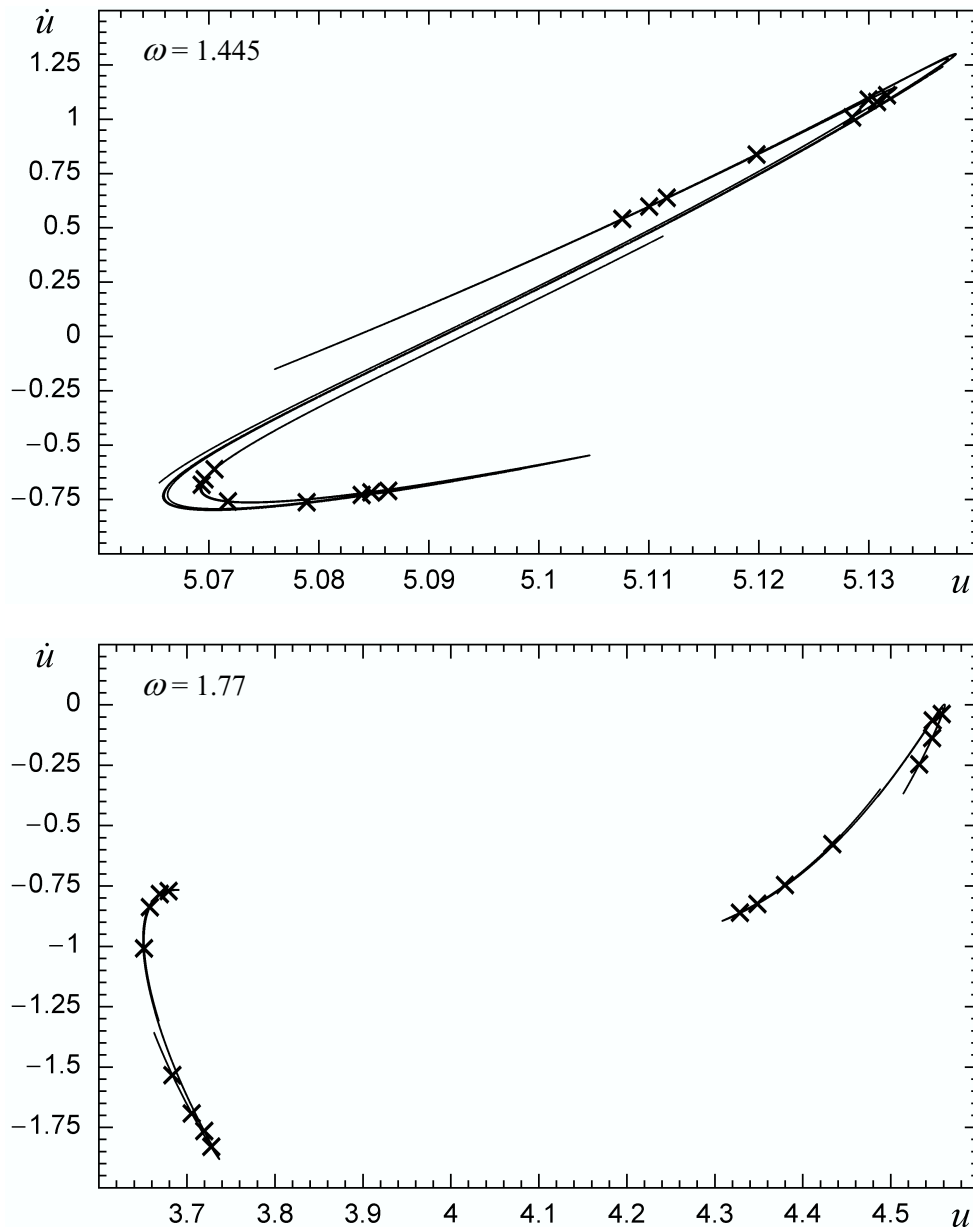


Рис. 9. Природа хаотичних атракторів що утворюються внаслідок нескінченного каскаду подвоєння періоду: $\omega = 1.445$ — хаотичний атрактор з рис. 7 (ліві пороги нестійкостей), $\omega = 1.77$ — хаотичний атрактор з рис. 8 (праві пороги нестійкостей); $\times$ — нестійкий стаціонарний розв’язок $\bar{u}^{(4)}(t; 16)$ (метод гармонічного балансу з $N = 50$).

авторами в більш пізній роботі [31]. Причиною кризи хаотичних атракторів є їх зіткнення з незалежною нестійкою періодичною орбітою, це питання розглянемо в розділі 1.3.4.

Зауважимо, що перехід від регулярного до хаотичного руху при $\omega_l^{(\infty)} < \omega < 1.445$ значно більш складний, ніж зазначено вище. Так,

при $\omega = 1.4446$ обидва несиметричні хаотичні атрактори складаються з двох окремих дуг, при $\omega = 1.4444$ — з чотирьох окремих дуг, при $\omega = 1.4443$ — з вісьми окремих дуг, і так далі. Ця послідовність хаотичних атракторів і відповідних криз, коли відбувається об'єднання дуг, вимагає окремого подальшого вивчення.

Поведінка хаотичних атракторів при $\omega < \omega_r^{(\infty)}$ аналогічна. Так, при $\omega = 1.77$ хаотичні атрактори складаються з двох окремих дуг (рис. 8). При зменшенні частоти після досягнення порогу при $1.758 < \omega < 1.759$ відбувається криза, і окремі дуги кожного з несиметричних атракторів раптово об'єднуються в одну (але при цьому самі дуги не перетинаються). Обидва несиметричні хаотичні атрактори, що при цьому утворюються, зображено на рис. 8 при $\omega = 1.758$. Ці два несиметричні атрактори об'єднуються в один великий хаотичний атрактор внаслідок наступних криз при $1.755 < \omega < 1.757$. (При цьому при $\omega = 1.756$ відбувається перехідний хаотичний рух, див. розділ 1.3.4, до субгармонічного розв'язку 28-ого порядку. Це питання також вимагає подальшого дослідження.) Перерізи Пуанкаре великого об'єданого хаотичного атрактора наведено на рис. 8 при $\omega = 1.75$ і $\omega = 1.7$.

На рис. 10, 11 показано, як внаслідок кризи змінюються спектр та фазовий портрет хаотичних атракторів. Видно, що фазовий портрет атракторів при $\omega = 1.445$ і $\omega = 1.77$ *несиметричний*, відповідно їх спектр містить явно виражені парні гармоніки, а спектр атракторів при $\omega = 1.77$ — ще й субгармоніки другого порядку. Це відповідає тому, що переріз Пуанкаре атракторів при $\omega = 1.77$ складається з двох дуг, а при $\omega = 1.445$ — з однієї дуги. Всі інші гармоніки присутні на малих часових масштабах у вигляді шуму, який поступово зникає при збільшенні часового інтервалу спостереження Δt (для побудови спектрів використовувалось швидке перетворення Фур'є). Спектр єдиного об'єданого атрактора,

що утворюється після кризи (чи послідовності кількох криз), містить лише чітко виражені непарні гармоніки. Парні гармоніки та субгармоніки присутні тільки у вигляді шуму і поступово зникають при збільшенні часового інтервалу спостереження. Таким чином, представлені при $\omega = 1.45$ і $\omega = 1.7$ хаотичні атрактори є *симетричними* в тому сенсі, що їх спектр на великих часових масштабах містить лише непарні гармоніки. Відповідно фазовий портрет цих атракторів також в середньому симетричний (він займає симетричну відносно початку координат область фазового простору). Отже, розглянуті кризи хаотичних атракторів можна розглядати як *відновлення симетрії* коливань, що була втрачена під час руйнування симетрії ультрагармонічного розв'язку $\tilde{u}^{(0)}(t)$ при $\omega \approx 1.4055$ (збільшення частоти) та $\omega \approx 2.5882$ (зменшення частоти), точки “6” та “1” на рис. 5.

З перерізів Пуанкаре $\omega = 1.75$ і $\omega = 1.7$ на рис. 8 добре видно, що при $\omega = 1.75$, близькій до критичної частоти, коли відбувається криза об'єднання атракторів, осцилятор переважну частину часу знаходиться в межах фазового простору, який при $\omega = 1.77$ займали обидва несиметричні хаотичні атрактори, і лише інколи відбувається перехід від одного атрактора до іншого. Така поведінка називається *перемежованістю*⁵ [69, с. 106, 177–179]. Після зменшення частоти до $\omega = 1.7$ час цього перехідного руху значно збільшується, і область хаотичного атрактора стає значно більш рівномірно заповненою.

На завершення зауважимо, що хаотичні атрактори в інтервалі частот $\omega_l^{(\infty)} < \omega < 1.508187$ співіснують разом з ультрагармонічним розв'язком $\tilde{u}^{(0)}(t)$, крива 9–8 на рис. 5, переріз Пуанкаре якого зображено на рис. 7 при $\omega = 1.45$. Одні початкові умови ведуть до хаотичного руху, а інші — до періодичного.

⁵intermittency (англ.)

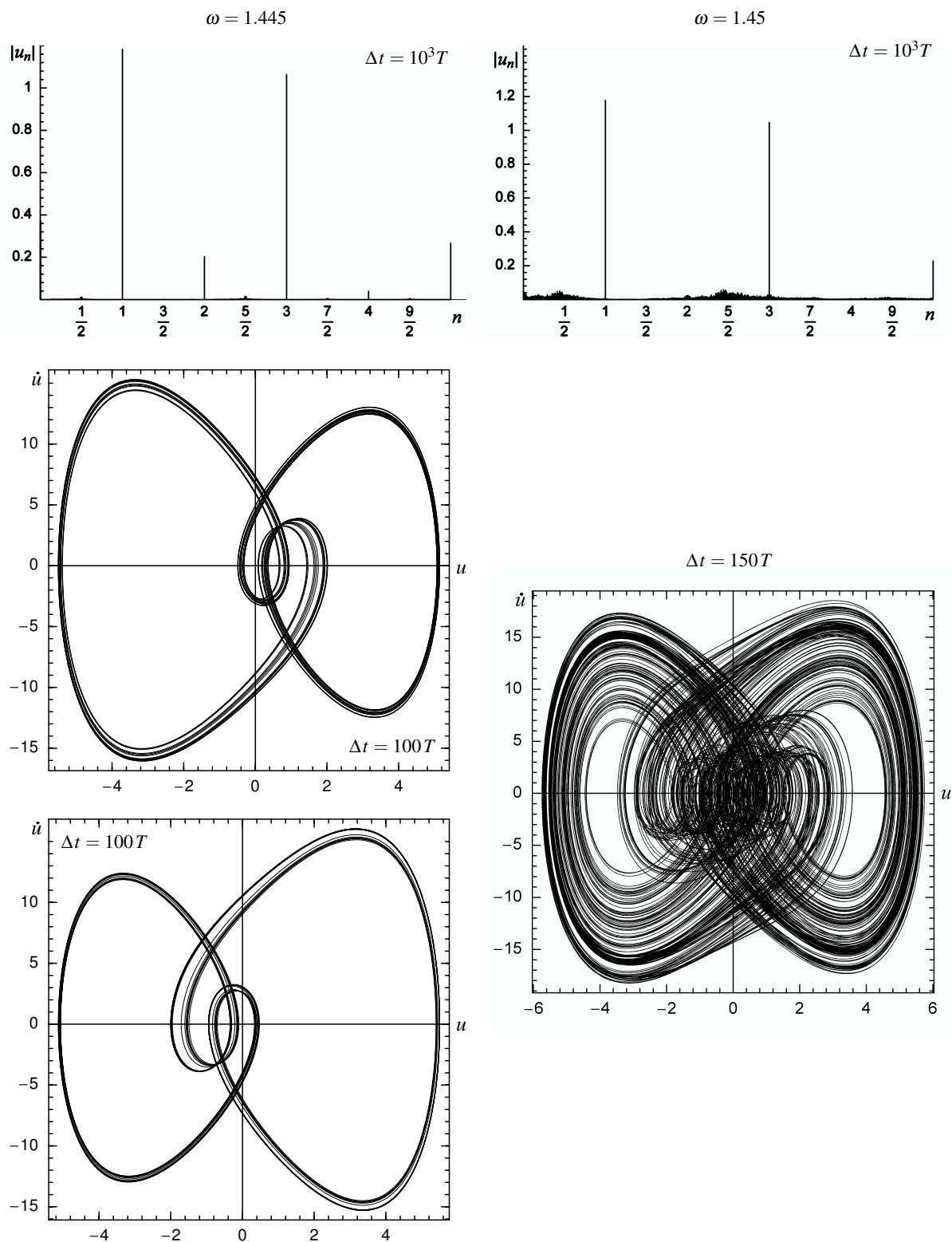


Рис. 10. Зміна спектру та фазового портрету хаотичних коливань у рівнянні $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ внаслідок кризи двох несиметричних хаотичних атракторів, зображених на рис. 7.

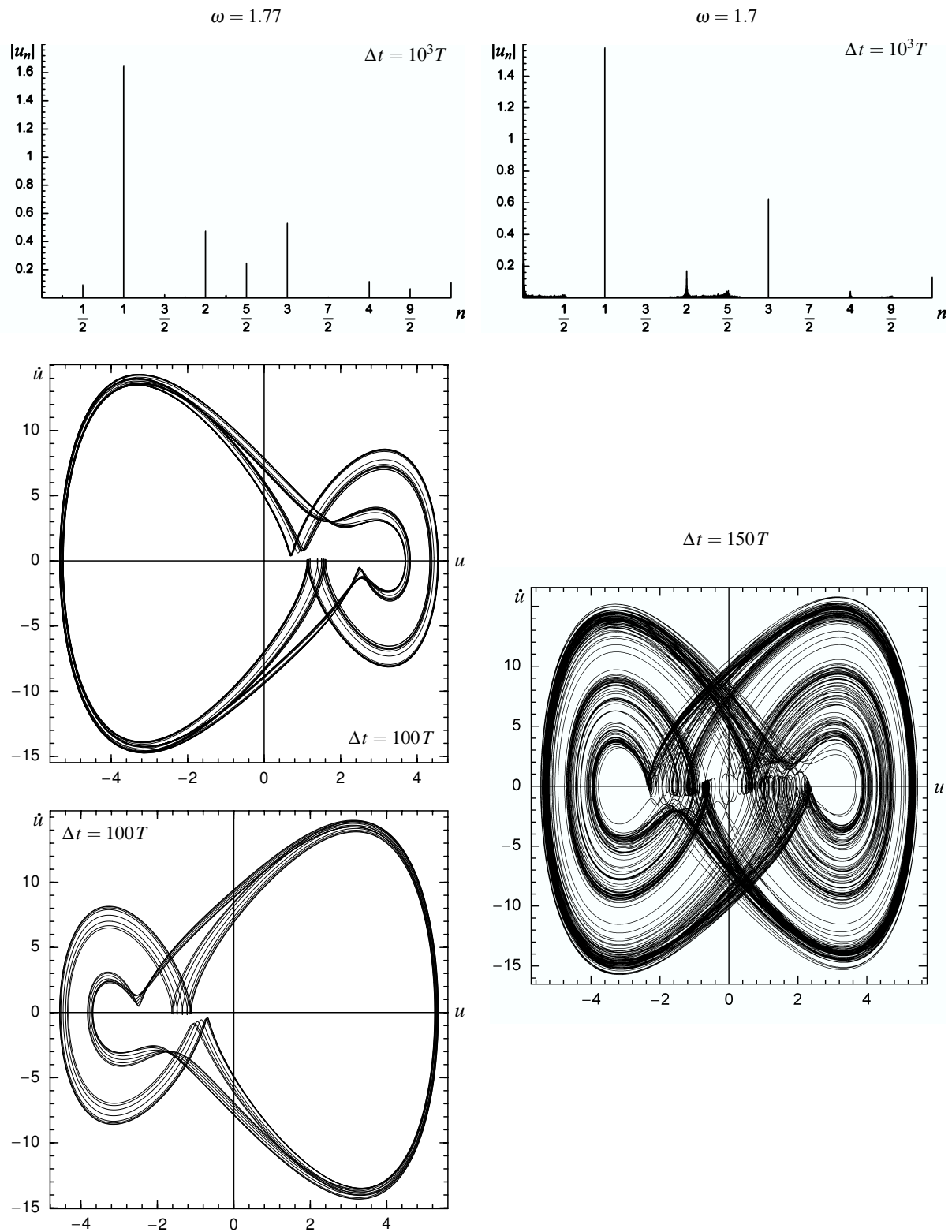


Рис. 11. Зміна спектру та фазового портрету хаотичних коливань у рівнянні $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40\cos\omega t$ внаслідок послідовності криз двох несиметричних хаотичних атракторів, зображених на рис. 8.

1.3.4. Субгармонічні коливання. Жорстке збудження. Перехідний хаос. Як було зазначено в розділі 1.2.5, жорстке збудження субгармонічних коливань не може бути передбачене в межах лінійної теорії стійкості. Тому знаходження стаціонарних розв’язків, що збуджуються жорстко, — значно більш складна задача, ніж пошук розв’язків, що збуджуються м’яко. Єдина підказка — шукати жорстке збудження субгармонік у тій же області параметрів системи, де відбувається м’яке збудження.

Нехай $\bar{u}^{(0)}(t)$ — стаціонарний розв’язок нульового рівня. Тоді стаціонарний розв’язок $\bar{u}^{(l_1)}(t; m)$ рівня l_1 , що збуджується жорстко, можна шукати у вигляді

$$\bar{u}^{(l_1)}(t; m) = \bar{u}^{(0)}(t) + \bar{v}^{(l_1)}(t; m) = \sum_{n=-N}^N (\bar{u}_n^{(0)} + \bar{v}_n^{(l_1)}) e^{in\omega t} + \sum_{n=-N}^{N-1} \sum_{n_1=1}^{m-1} \bar{v}_{n+\frac{n_1}{m}}^{(l_1)} e^{i(n+\frac{n_1}{m})\omega t} = \sum_{n=-mN}^{mN} \bar{u}_{\frac{n}{m}}^{(l_1)} e^{i\frac{n}{m}\omega t}. \quad (71)$$

Коефіцієнти $\bar{v}_{n/m}^{(l_1)}$ ($|n| = \overline{0, mN}$) знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь (40). При практичних розрахунках для того, щоб потрапити на новий розв’язок, необхідно перебрати певну кількість початкових наближень для коефіцієнтів $\bar{v}_{n/m}^{(l_1)}$. Найбільш ефективним при цьому є варіювати початкові наближення лише для одного коефіцієнта, наприклад, $\bar{v}_{1/m}^{(l_1)}$, а початкові наближення для всіх інших коефіцієнтів покладати рівними нулю.

Результати розрахунків представлено на рис. 12, 13, 14, 15.⁶ Для того, щоб розрізняти різні субгармонічні розв’язки однакового порядку в різних каскадах розв’язків, введено додаткові позначення. Так, у розв’язку $\bar{u}^{(l,R)}(t; m)$ другий верхній індекс R, який запису-

⁶Частину цих розрахунків провів Салій Ростислав Ярославович під час виконання дипломної роботи магістра “Субгармонічні нестійкості та перехід до хаосу при вимушених коливаннях осцилятора Дюффінга з жорсткою нелінійністю” (Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, 2004 р., наук. кер. Лукомський В.П.).

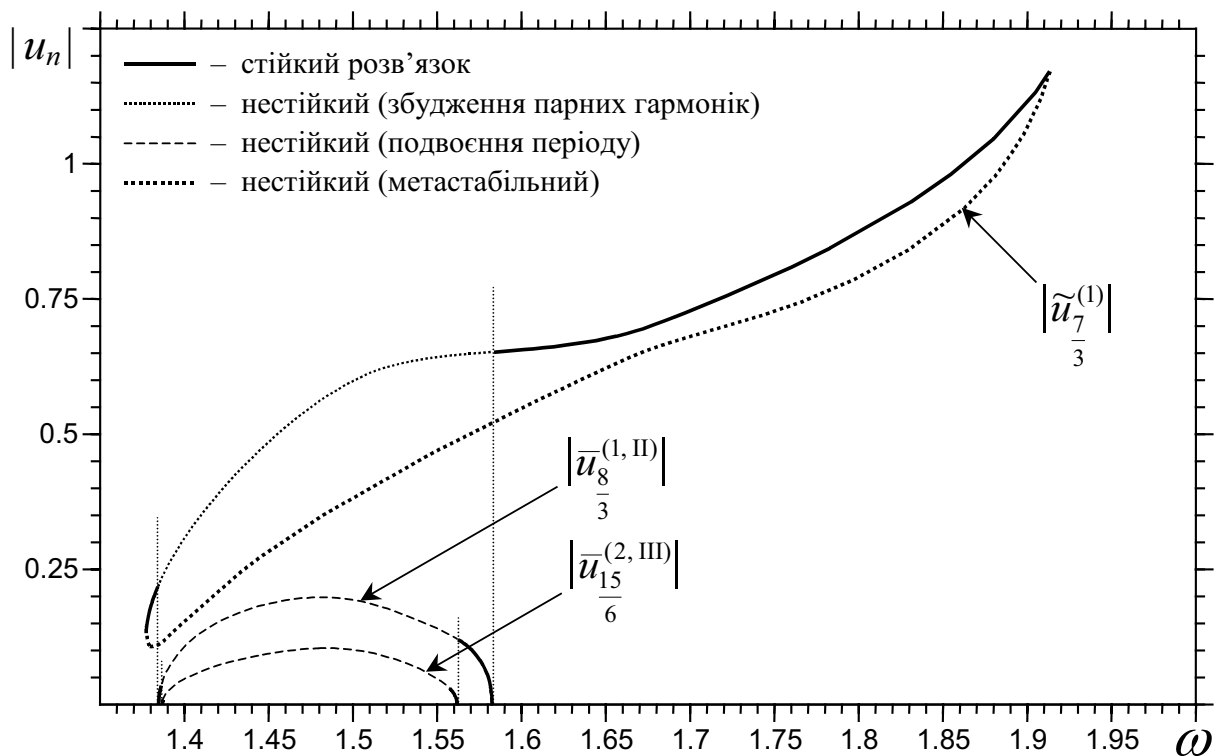


Рис. 12. Жорстке збудження симетричного субгармонічного розв'язку третього порядку, який містить лише непарні гармоніки, з подальшим м'яким збудженням парних субгармонік третього порядку та подвоєнням періоду до субгармонічного розв'язку шостого порядку в рівнянні $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40\cos\omega t$ (метод гармонічного балансу $N = 50$). Для кожного розв'язку наведено амплітудно-частотну залежність найбільшої за амплітудою субгармоніки. Області збудження розв'язків:

$$\tilde{u}^{(1)}(t; 3) \quad - \quad \omega \in [1.377349, 1.913055],$$

$$\bar{u}^{(1,II)}(t; 3) \quad - \quad \omega \in [1.384746, 1.582541],$$

$$\bar{u}^{(2,III)}(t; 6) \quad - \quad \omega \in [1.386565, 1.561860],$$

$$\text{подальше подвоєння періоду} \quad - \quad \omega \in [1.386950, 1.557688].$$

ватимемо римськими цифрами, означає порядковий номер цього розв'язку в каскаді розв'язків, якому він належить. Розв'язок з індексом I завжди збуджується жорстко — він є першим розв'язком у каскаді. Всі наступні розв'язки з індексами II, III, IV, ... збуджуються м'яко в результаті нестійкостей попередніх розв'язків.

На рис. 12 зображено амплітудно-частотну залежність резонансної субгармоніки $\frac{7}{3}$ симетричного розв'язку $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$, який

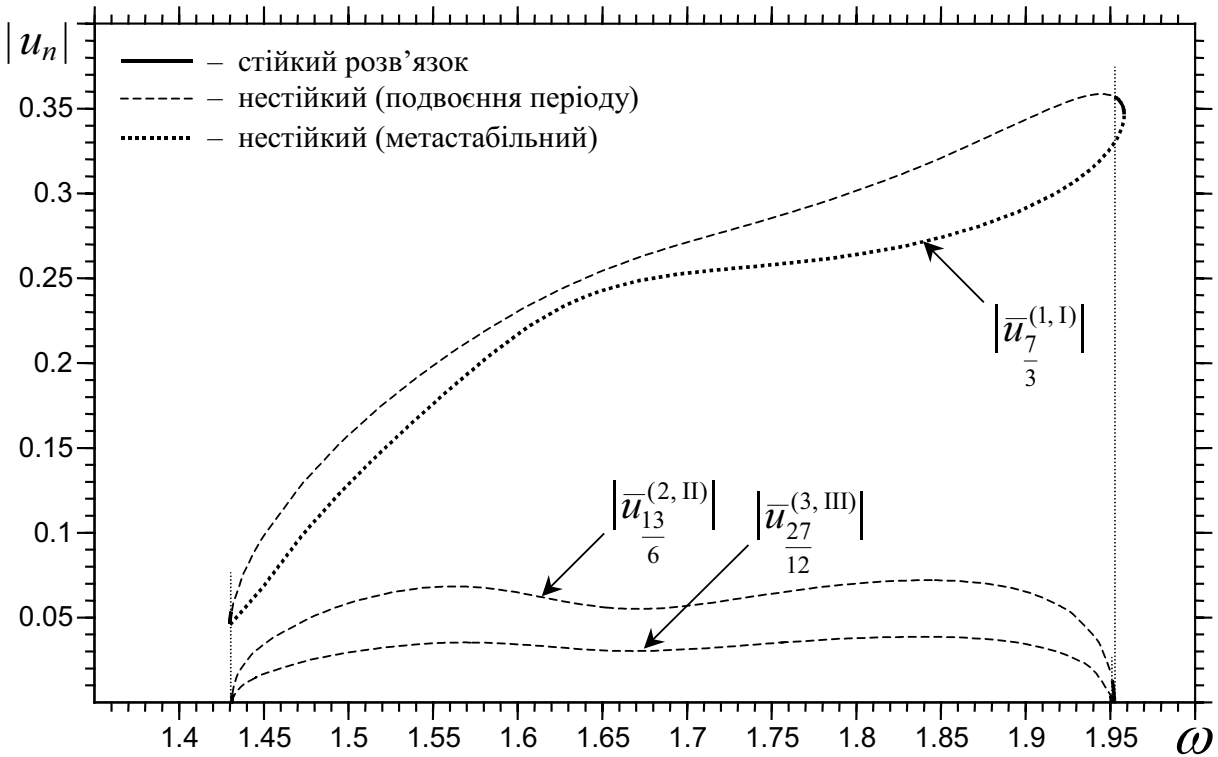


Рис. 13. Жорстке збудження несиметричного субгармонічного розв'язку третього порядку, який одразу містить як непарні, так і парні гармоніки, з подальшим каскадом подвоєння періоду в рівнянні $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ (метод гармонічного балансу $N = 50$). Для кожного розв'язку наведено амплітудно-частотну залежність найбільшої за амплітудою субгармоніки. Області збудження розв'язків:

$$\bar{u}^{(1,I)}(t; 3) \quad - \quad \omega \in [1.430160, 1.958183],$$

$$\bar{u}^{(2,II)}(t; 6) \quad - \quad \omega \in [1.431078, 1.952356],$$

$$\bar{u}^{(3,III)}(t; 12) \quad - \quad \omega \in [1.431371, 1.950481],$$

$$\text{подальше подвоєння періоду} \quad - \quad \omega \in [1.431437, 1.950067].$$

містить лише непарні гармоніки. Видно, що розв'язок збуджується жорстко. Одержаний розв'язок двозначний. Його аналіз на стійкість показує, що нижня гілка скрізь метастабільна, а верхня гілка при $\omega \in [1.384746, 1.582541]$ нестійка відносно збудження парних гармонік. Точно в цій області вже м'яко збуджується стаціонарний розв'язок $\bar{u}^{(1,II)}(t; 3)$, який містить парні гармоніки. Він представлений на рис. 12 субгармонікою $\frac{8}{3}$. Розв'язок $\bar{u}^{(1,II)}(t; 3)$ стійкий лише у вузьких частотних смугах навколо порогів свого

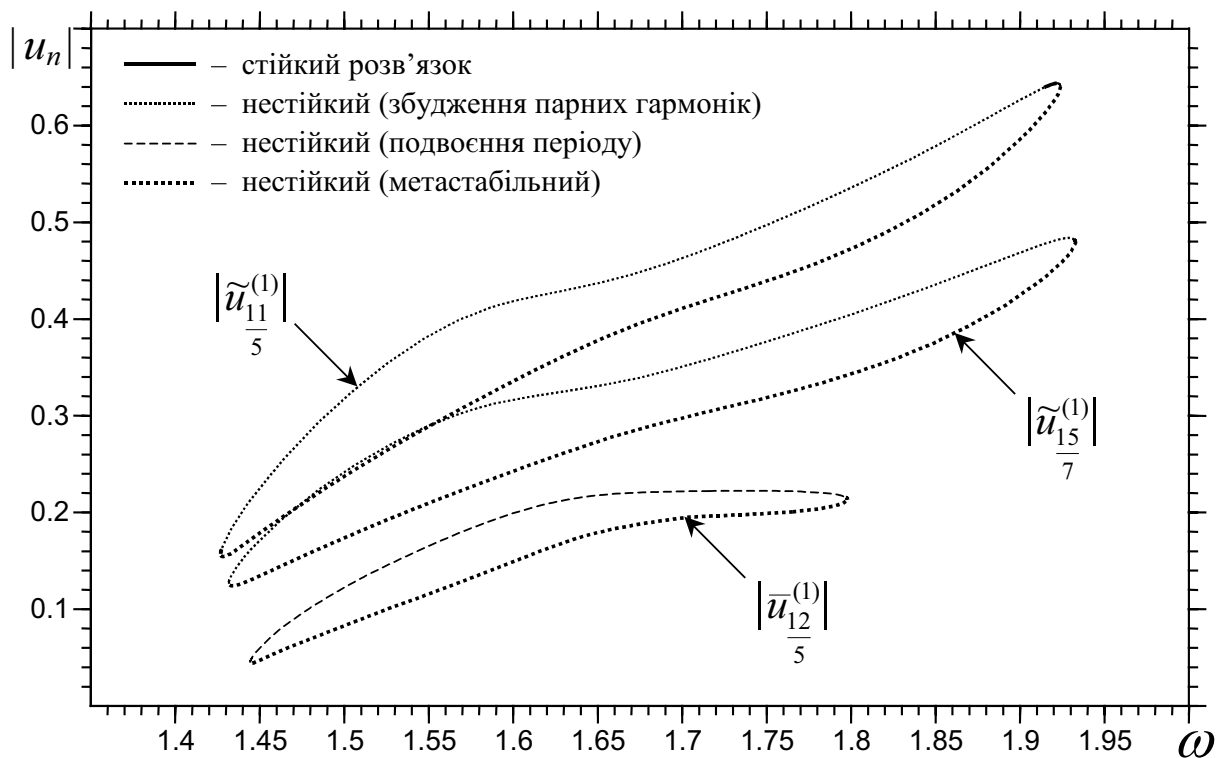


Рис. 14. Жорстке збудження симетричних субгармонічних розв'язків п'ятого та сьомого порядків та несиметричного субгармонічного розв'язку п'ятого порядку в рівнянні $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ (метод гармонічного балансу $N = 50$). Для кожного розв'язку наведено амплітудно-частотну залежність найбільшої за амплітудою субгармоніки. Області збудження розв'язків: $\tilde{u}^{(1)}(t; 5) - \omega \in [1.426870, 1.923931]$, подальше збудження парних гармонік — $\omega \in [1.427316, 1.914368]$; $\tilde{u}^{(1)}(t; 7) - \omega \in [1.431706, 1.932641]$, подальше збудження парних гармонік — $\omega \in [1.431761, 1.932226]$; $\bar{u}^{(1)}(t; 5) - \omega \in [1.444408, 1.797964]$, подальше подвоєння періоду — $\omega \in [1.444445, 1.796900]$.

збудження — на решті частот він нестійкий відносно подвоєння періоду. В області цієї нестійкості збуджується наступний розв'язок $\bar{u}^{(2,III)}(t; 6)$, представлений на рис. 12 субгармонікою $\frac{15}{6}$. Цей розв'язок також нестійкий відносно подальшого подвоєння періоду майже при всіх частотах, окрім невеликих смуг навколо порогів свого збудження.

Жорстко можуть збуджуватись не лише симетричні розв'язки, які містять тільки непарні гармоніки. Так, на рис. 13 зображено

амплітудно-частотну залежність резонансної субгармоніки $\frac{7}{3}$ несиметричного розв'язку $\bar{u}^{(1,1)}(t; 3)$, який одразу містить як непарні, так і парні гармоніки, і збуджується жорстко. Проте на відміну від симетричного розв'язку $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$, розв'язок $\bar{u}^{(1,1)}(t; 3)$ стійкий лише у вузьких частотних смугах навколо порогів свого збудження. При всіх інших частотах відбувається подвоєння періоду, і м'яко збуджується розв'язок $\bar{u}^{(2,II)}(t; 6)$, представлений на рис. 13 субгармонікою $\frac{13}{6}$. Він у свою чергу також нестійкий відносно подвоєння періоду майже при всіх частотах, що призводить до збудження наступного розв'язку $\bar{u}^{(3,III)}(t; 12)$, що представлений на рис. 13 субгармонікою $\frac{27}{12}$, і так далі.

На рис. 14 представлено амплітудно-частотні залежності резонансних субгармонік деяких інших субгармонічних розв'язків непарного порядку, що збуджуються жорстко, а саме: симетричні субгармонічні розв'язки п'ятого та сьомого порядків та несиметричний субгармонічний розв'язок п'ятого порядку. Зрозуміло, що рівняння скоріш за все має безліч інших субгармонічних розв'язків ще вищих порядків, які також збуджуються жорстко. Детальніше вивчення цих розв'язків залишимо на майбутнє.

Нарешті, жорстко можуть збуджуватись і субгармонічні розв'язки парного порядку. Так, на рис. 15 представлено амплітудно-частотні залежності резонансних субгармонік розв'язків шостого $\bar{u}^{(2,1)}(t; 6)$ та дванадцятого $\bar{u}^{(3,1)}(t; 12)$ порядків, що збуджуються жорстко. Вони стійкі лише в дуже вузьких частотних смугах навколо порогів свого збудження.

Зауважимо, що всі знайдені розв'язки, які збуджуються жорстко, двозначні, причому *одна з гілок завжди метастабільна при всіх частотах*. Схоже, що це є універсальною властивістю субгармонічних розв'язків, що збуджуються жорстко.

Знайдені розв'язки надають можливість зрозуміти причину кри-

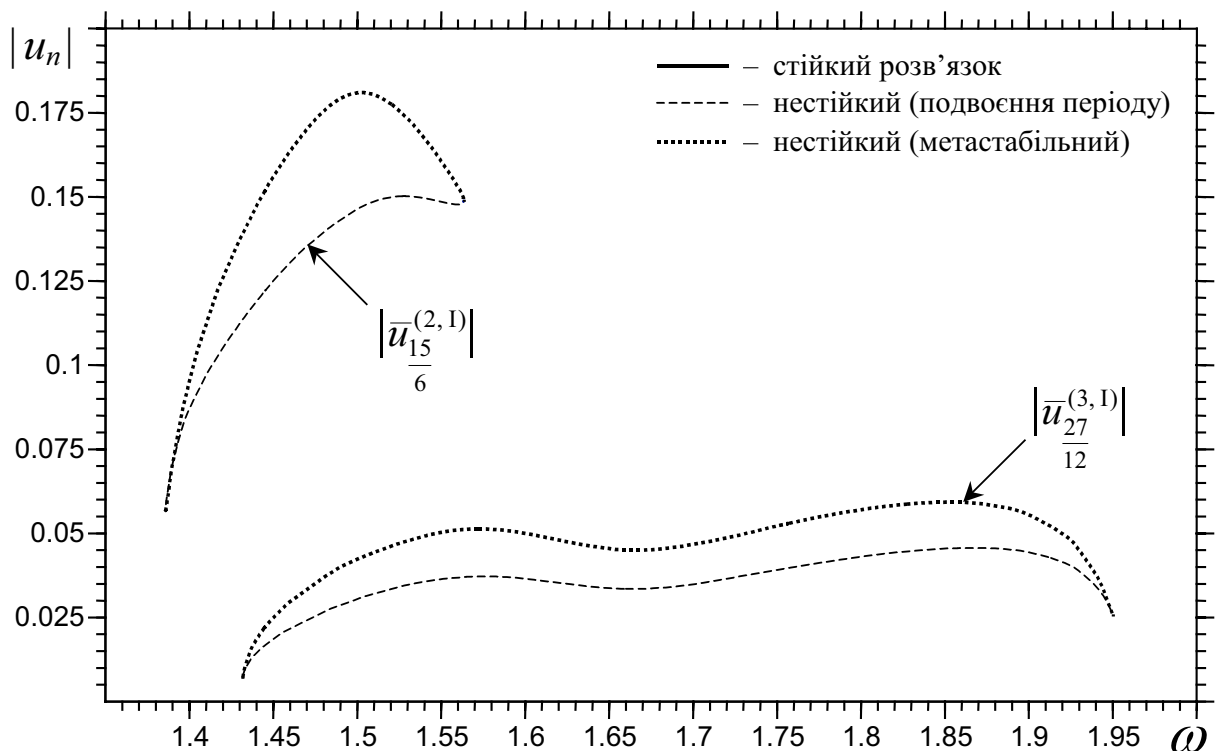


Рис. 15. Жорстке збудження субгармонічних розв'язків шостого та дванадцятого порядків у рівнянні $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ (метод гармонічного балансу $N = 50$). Для кожного розв'язку наведено амплітудно-частотну залежність найбільшої за амплітудою субгармоніки. Області збудження розв'язків: $\bar{u}^{(2,1)}(t; 6) - \omega \in [1.385718, 1.563361]$,

подальше подвоєння періоду — $\omega \in [1.385742, 1.563356]$;

$\bar{u}^{(3,1)}(t; 12) - \omega \in [1.4316284, 1.949996]$,

подальше подвоєння періоду — $\omega \in [1.4316299, 1.949988]$.

зи при $1.4451 < \omega < 1.4452$, коли два несиметричні хаотичні атрактори на рис. 7 об'єднуються в єдиний значно більший за розмірами атрактор. На рис. 16 зображено обидва несиметричні хаотичні атрактори при $\omega = 1.4451$ та єдиний симетричний хаотичний атрактор при $\omega = 1.4452$ з двома його збільшеними частинами, де містяться дуги, які були окремими атракторами при $\omega = 1.4451$. Видно, що криза відбувається тоді, коли кожний з обох несиметричних хаотичних атракторів на фазовій площині одночасно стикається з відповідним нестійким стаціонарним розв'язком $\bar{u}^{(3,1)}(t; 12)$ (їх також два внаслідок симетрії (66) рівняння

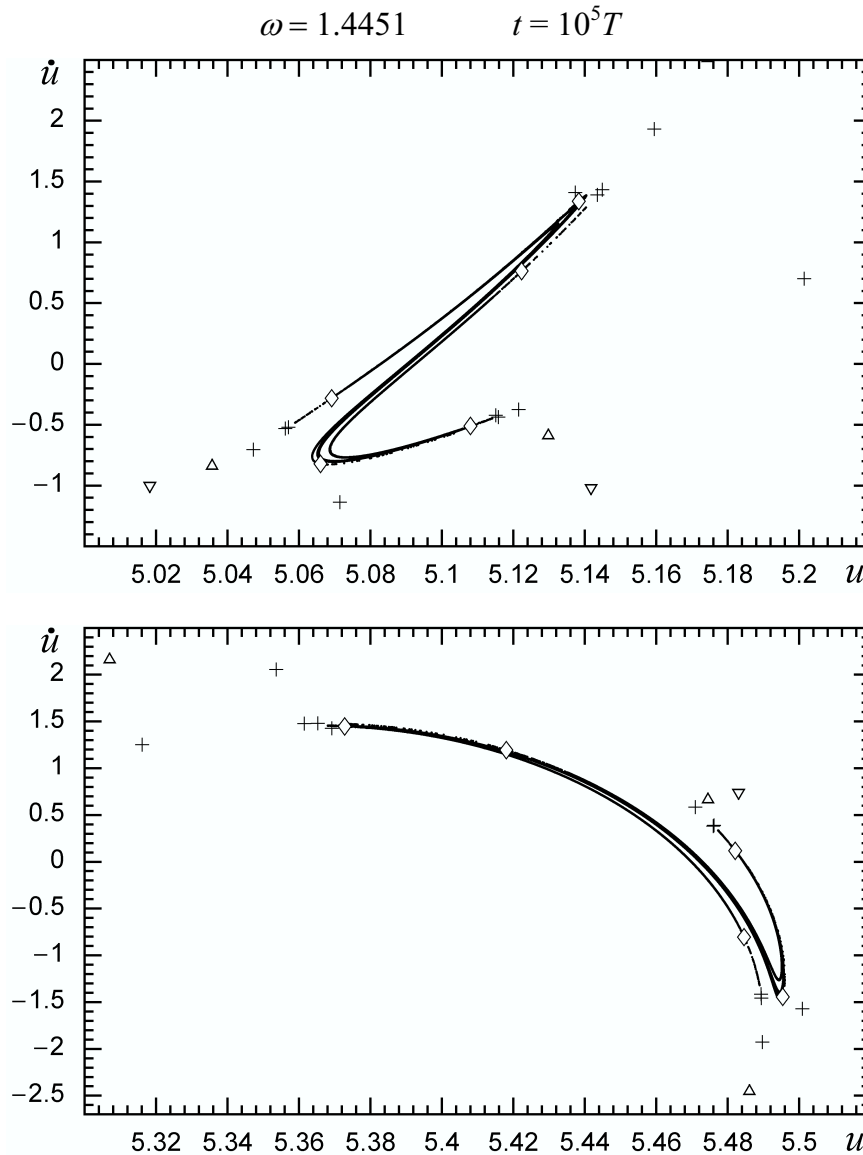
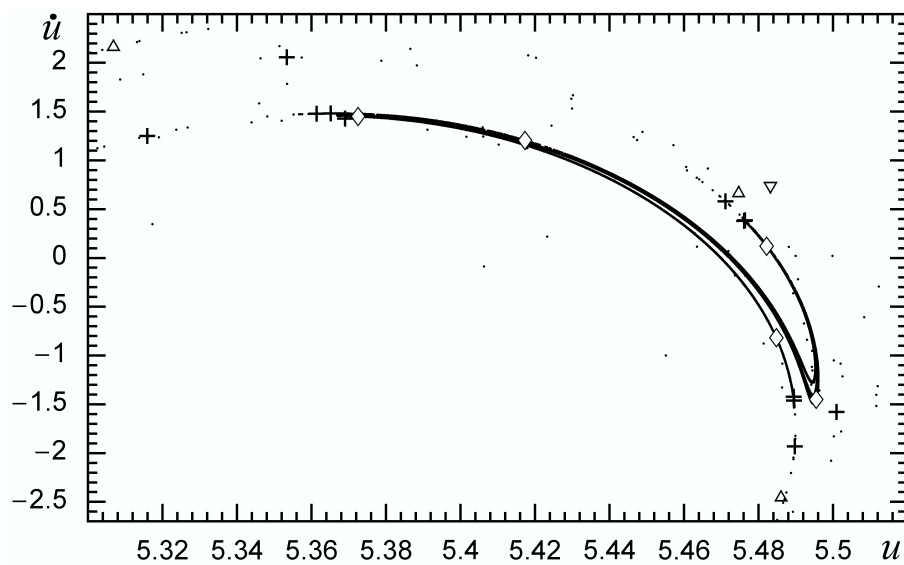
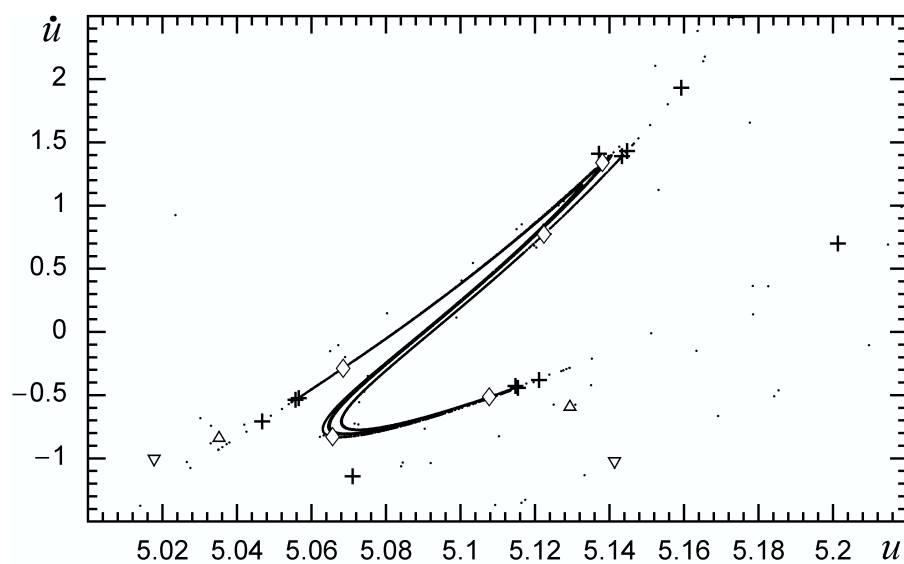
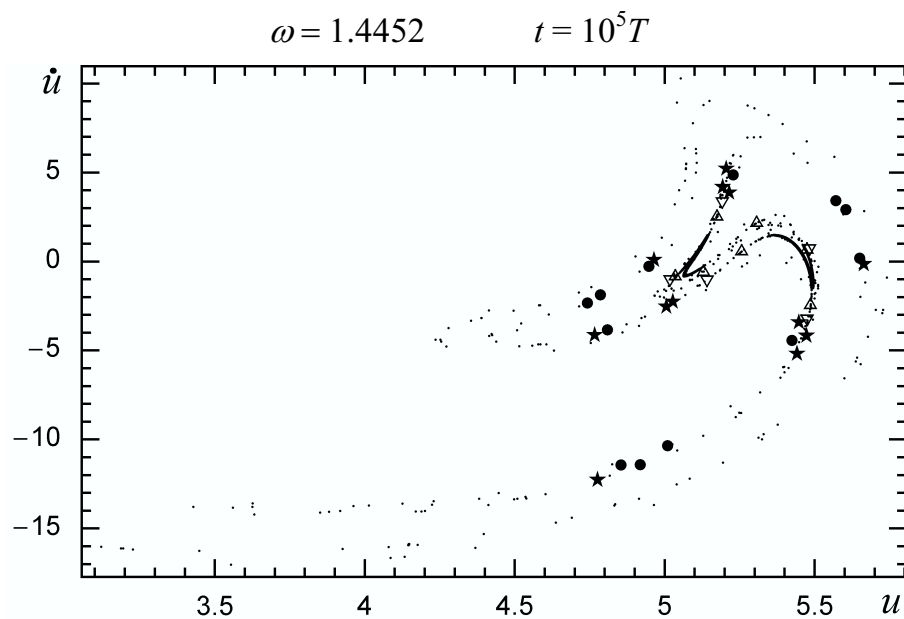


Рис. 16. Криза, при якій два несиметричні хаотичні атрактори об'єднуються в один, при цьому розмір атрактора на фазовій площині різко збільшується. Хаотичні атрактори розраховано методом Рунге-Кутта четвертого порядку, а нестійкі стаціонарні розв'язки — методом гармонічного балансу з $N = 50$: $\omega = 1.4451$ — два несиметричні хаотичні атрактори, $\omega = 1.4452$ — симетричний хаотичний атрактор та дві його збільшені частини, де містяться дуги, які були окремими атракторами при $\omega = 1.4451$; $+$ — пара розв'язків $\bar{u}^{(3, I)}(t; 12)$, ∇ — розв'язок $\tilde{u}^{(1)}(t; 5)$, $\triangle$ — розв'язок $\tilde{u}^{(1)}(t; 7)$, $\diamond$ — пара розв'язків $\bar{u}^{(1)}(t; 5)$, $\star$ — пара розв'язків $\bar{u}^{(2, I)}(t; 6)$, $\bullet$ — пара розв'язків $\bar{u}^{(2, III)}(t; 6)$. Несиметричні розв'язки завжди існують парами внаслідок симетрії (66) рівняння руху, але окремі позначення для таких розв'язків не введено.



руху, проте на рис. 16 окремі позначення для таких розв'язків не введено). При цьому пара нестійких розв'язків $\bar{u}^{(3, I)}(t; 12)$ (а також всі інші нестійкі розв'язки в обох каскадах, що ця пара розв'язків розпочинає) додаються до множини нестійких розв'язків, що складають хаотичний атрaktor. (Це є нестійкі субгармонічні розв'язки порядку 2^n , $n = \overline{1, \infty}$, див. рис. 9, розв'язки порядку $5 \cdot 2^n$, $n = \overline{0, \infty}$, котрі, як видно з рис. 16, також містяться на хаотичних атраторах при $\omega = 1.4451$, а, можливо, й інші, ще не знайдені нами, розв'язки). Це і призводить до розширення атратора.

Картина на рис. 16 ще не зовсім повна. Хоча нестійкий розв'язок $\bar{u}^{(3, I)}(t; 12)$ очевидно відповідає за кризу, він ще не пояснює, чому обидва атрактори об'єднуються в один. Жодний з зображених на рис. 16 і на даний момент знайдених нами розв'язків не відповідає за безпосереднє об'єднання атракторів. Можна лише припустити, що за це відповідають нестійкі розв'язки, які містяться в каскадах, що розпочинаються симетричними розв'язками $\tilde{u}^{(1)}(t; 5)$ і $\tilde{u}^{(1)}(t; 7)$, або субгармонічними розв'язками ще вищого непарного порядку. Видно, що за утворення великого за розмірами атратора скоріш за все також відповідають нестійкі розв'язки $\bar{u}^{(2, I)}(t; 6)$ і $\bar{u}^{(2, III)}(t; 6)$ та наступні за ними розв'язки у відповідних каскадах. Побудова остаточної картини вимагає додаткових досліджень.

Зауважимо, що подібний до вказаного нами механізм кризи, коли відбувається об'єднання хаотичних атракторів, описаний в роботах [33, 31] на прикладі вимушених коливань математичного маятника. Що стосується хаотичних атракторів на рис. 8, то причиною їх криз є якісь інші, ще не знайдені нами, нестійкі розв'язки. Це питання також вимагає подальшого дослідження.

Наприкінці розглянемо детальніше, як розв'язок $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ з рис. 12, який є стійким у досить широкій смузі частот, впливає

на існування хаотичних атракторів. Для цього спочатку дослідимо каскад субгармонічних розв'язків, що розпочинається з розв'язку $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ при $\omega \lesssim 1.58$, та результуючі хаотичні атрактори. На рис. 17 представлено результати чисельних розрахунків методом Рунге-Кутта четвертого порядку, при цьому необхідні початкові умови забезпечуються розв'язками, одержаними методом гармонічного балансу. Видно, що при $\omega = 1.59$ існує симетричний субгармонічний розв'язок третього порядку. Його спектр містить лише непарні гармоніки. Після зменшення частоти цей розв'язок стає нестійким, і при $\omega = 1.57$ існує вже пара несиметричних субгармонічних розв'язків третього порядку, які містять як непарні, так і парні гармоніки (несиметричні розв'язки завжди існують попарно внаслідок симетрії (66) рівняння руху). При подальшому зменшенні частоти ці розв'язки стають нестійкими, а збуджуються субгармонічні розв'язки з подвоєним періодом $6T$, які зображено при $\omega = 1.56$, і так далі.

При $1.556 < \omega < 1.557$ відбувається перехід до хаотичного руху. На рис. 17 при $\omega = 1.553$ зображено два несиметричні хаотичні атрактори, кожний з яких складається з трьох окремих дуг. При $1.552 < \omega < 1.553$ відбувається криза, в результаті якої обидва несиметричні хаотичні атрактори раптово об'єднуються в єдиний симетричний атрактор, що також складається з трьох окремих дуг (тут є відмінність від кризи на рис. 8). Такий хаотичний атрактор на рис. 17 зображено при $\omega = 1.55$. Нарешті, при $1.548 < \omega < 1.549$ відбувається наступна криза, і всі три дуги раптово поєднуються. Симетричний хаотичний атрактор, що в результаті утворюється, зображено на рис. 17 при $\omega = 1.54$.

Таким чином, хаотичні коливання в рівнянні (65) з $F = 20$ існують при $1.4443 \lesssim \omega \lesssim 1.556$ (границі лівих порогів нестійкостей на рис. 6, табл. 3, та правих порогів нестійкостей на рис. 12). При

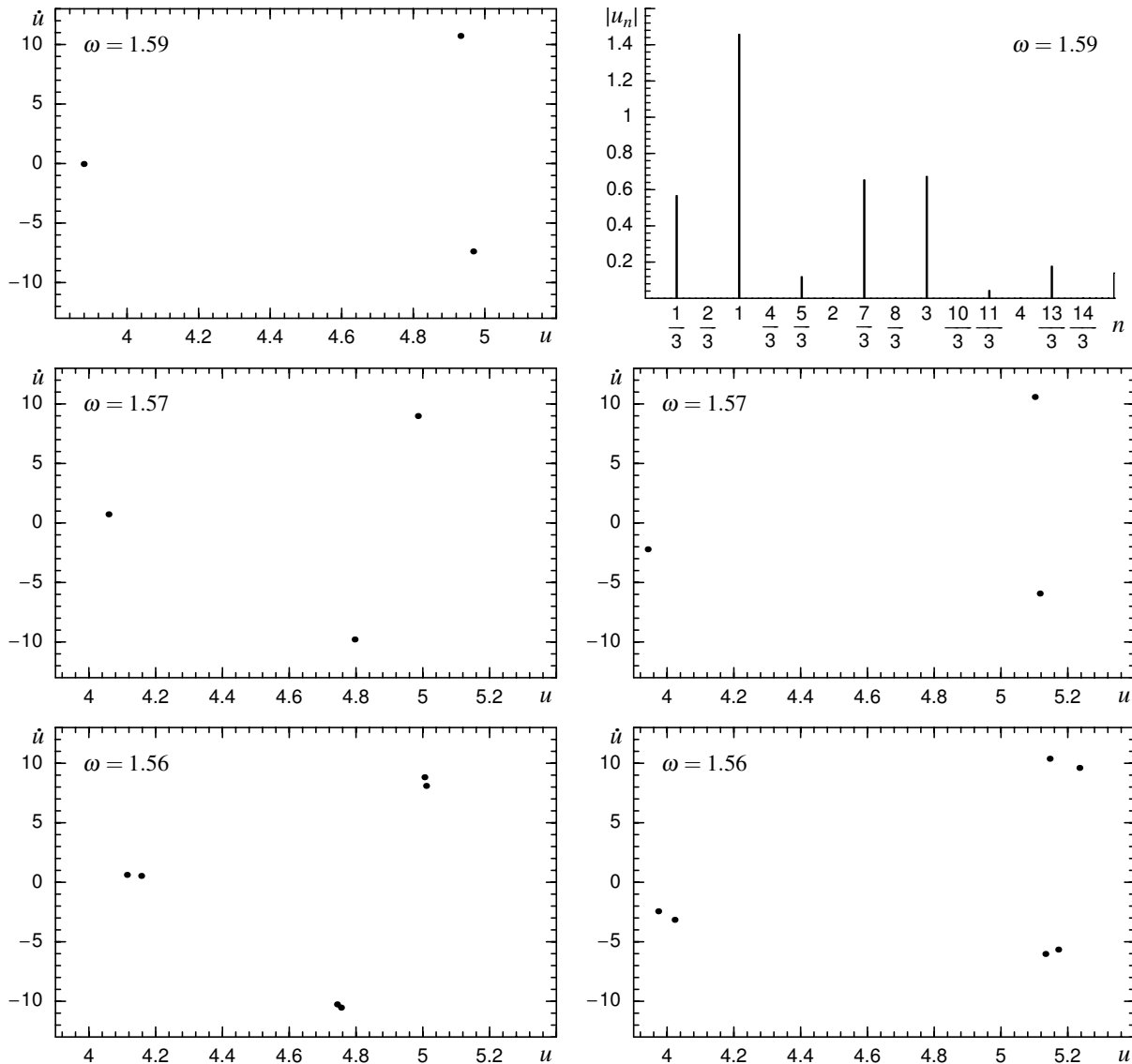
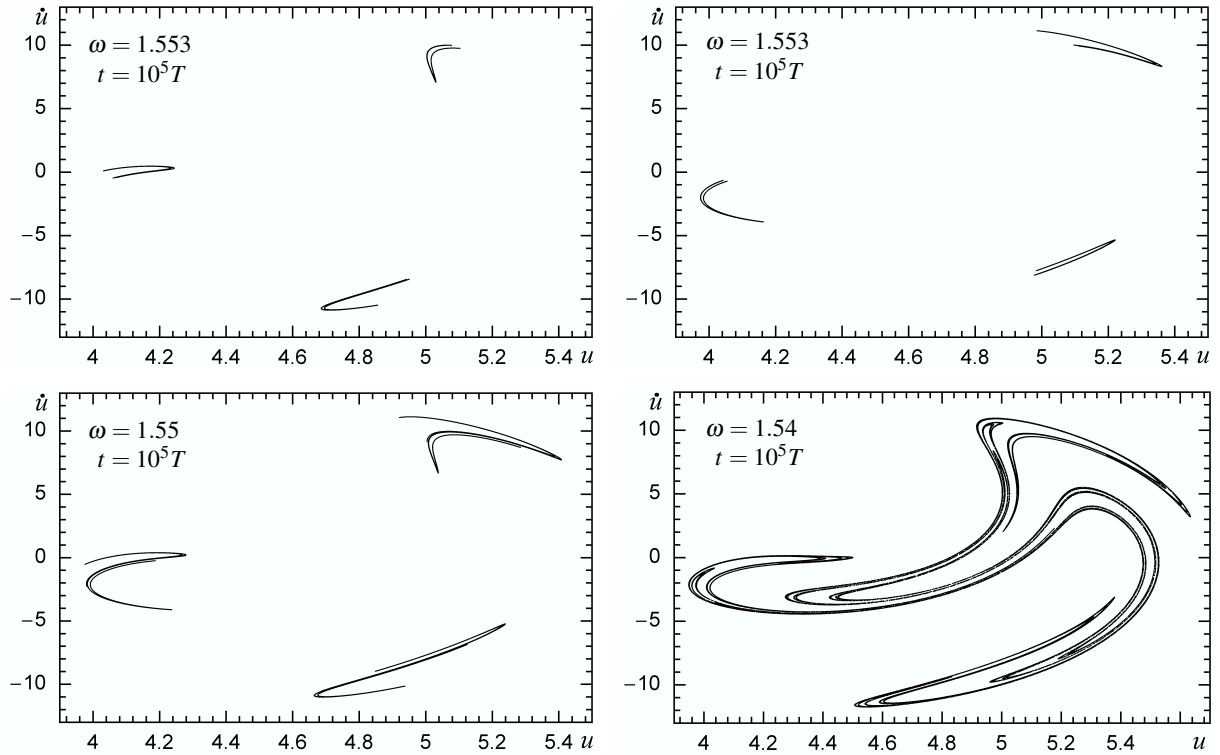


Рис. 17. Каскад подвоєння періоду, що розпочинається з симетричного субгармонічного розв'язку третього порядку, який збуджується жорстко. Каскад складається зі стаціонарних субгармонічних розв'язків порядку $3 \cdot 2^n$ рівняння $\ddot{u} + 0.2\dot{u} + u + u^3 = 40 \cos \omega t$ і веде до хаотичного руху. Чисельні розв'язки одержано методом Рунге-Кутта четвертого порядку. Представлено такі перерізи Пуанкаре: $\omega = 1.59$ — симетричний $3T$ -розв'язок (його спектр містить лише непарні гармоніки); $\omega = 1.57$ — несиметричні $3T$ -розв'язки; $\omega = 1.56$ — $6T$ -розв'язки; $\omega = 1.553$ — несиметричні хаотичні аттрактори, кожний з яких складається з трьох окремих дуг. Перерізи з першого та другого стовпчиків відповідають двом різним сімействам несиметричних розв'язків (67), що зсунуті по фазі один відносно іншого, відповідні початкові умови — $u(0) = 4.75$; $\dot{u}(0) = -10$ та $u(0) = 5.13$; $\dot{u}(0) = -6$. Два перерізи в останньому рядку представля-



ють симетричні хаотичні атрактори при $\omega = 1.55$ та $\omega = 1.54$. Хаотичний атрактор при $\omega = 1.55$, що також складається з трьох окремих дуг, утворюється внаслідок кризи, коли два несиметричні хаотичні атрактори об'єднуються в єдиний атрактор при $1.552 < \omega < 1.553$. Хаотичний атрактор при $\omega = 1.54$, де всі дуги вже об'єднані, утворюється внаслідок наступної кризи при $1.548 < \omega < 1.549$.

$\omega \gtrsim 1.557$ існують лише стійкі субгармонічні розв'язки порядку $3 \cdot 2^n$. Що ж відбувається з хаотичними атракторами, що утворюються при $\omega \lesssim 1.777$ (границя правих порогів нестійкостей на рис. 6, табл. 3)? При $1.621 \leq \omega \lesssim 1.777$ хаотичні атрактори співіснують зі стійким розв'язком $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$, при цьому одні початкові умови ведуть до хаотичного руху, а інші — до періодичного. При $1.62 < \omega < 1.621$ хаотичні коливання раптово зникають (без оберненого каскаду подвоєння періоду, як це зазвичай відбувається), і при $1.582542 \leq \omega \lesssim 1.62$ всі початкові умови ведуть лише до стійкого розв'язку $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$. Це є прикладом так званого *періодичного вікна* в області хаотичних коливань [69, с. 28].

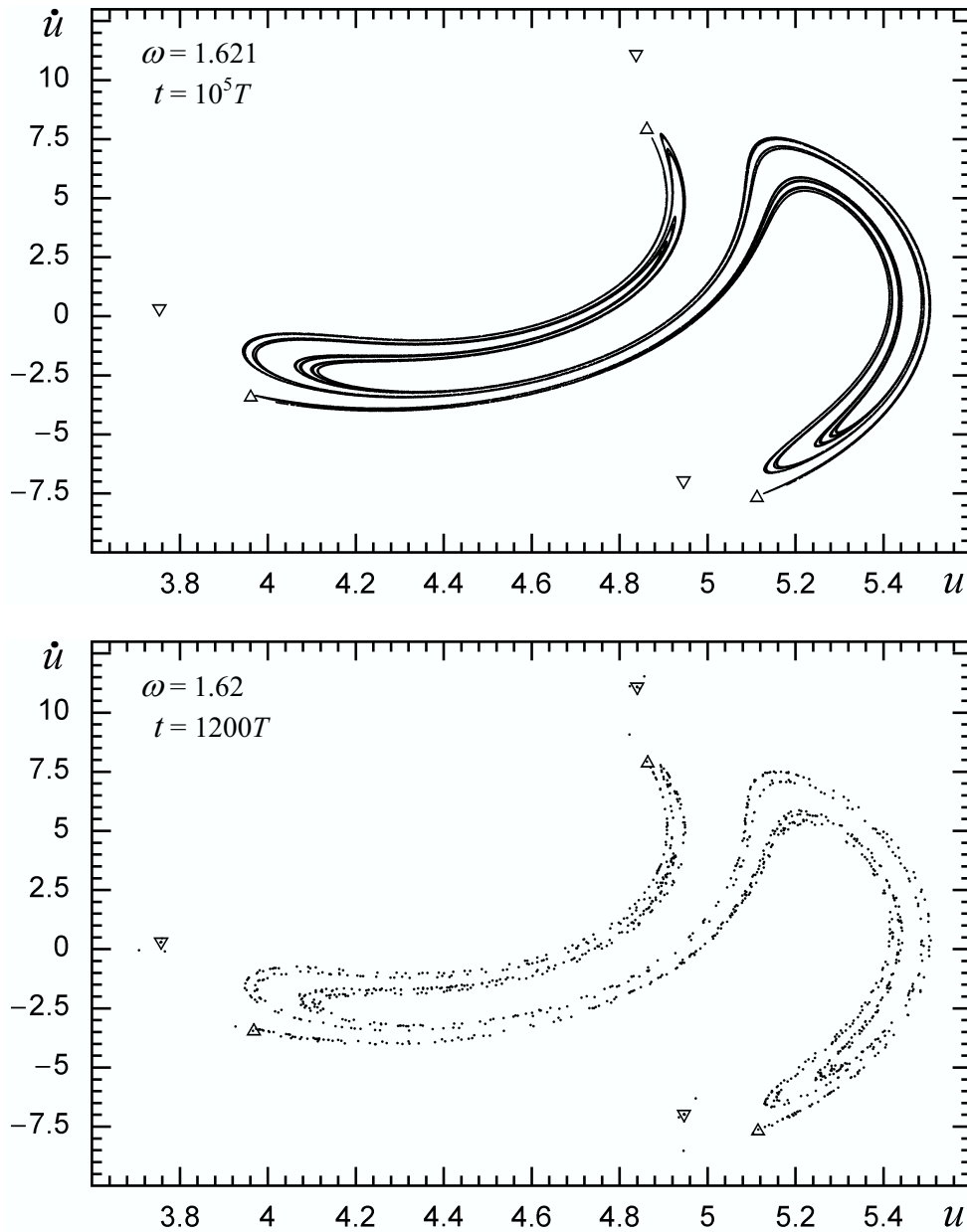


Рис. 18. Руйнування хаотичного атрактора, що відбувається внаслідок його зіткнення з нестійким метастабільним субгармонічним розв'язком $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ і супроводжується перехідним хаосом. Хаотичні атрактори розраховано методом Рунге-Кутта четвертого порядку (початкові умови — $u(0) = 5.25$; $\dot{u}(0) = -2$), а субгармонічні стаціонарні розв'язки — методом гармонічного балансу з $N = 50$: Δ — нестійкий метастабільний розв'язок $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ (нижня гілка на рис. 12), ∇ — стійкий розв'язок $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ (верхня гілка на рис. 12).

Причиною раптового руйнування хаотичного атрактора при $1.62 < \omega < 1.621$ є його зіткнення з нестійким метастабільним розв'язком $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ (нижня гілка на рис. 12). Це добре видно з рис. 18. При $\omega = 1.621$ хаотичний атрактор співіснує зі стійким розв'язком $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ (верхня гілка на рис. 12), при цьому нестійкий метастабільний розв'язок $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$ (нижня гілка на рис. 12) ще лежить за межами хаотичного атрактора. При $\omega = 1.62$ вже існують лише залишки хаотичного атрактора. Осцилятор, що в початковий момент часу знаходиться в області фазового простору, яку займав при $\omega = 1.621$ хаотичний атрактор, ще деякий час (у наведеному розрахунку $\Delta t \approx 1200T$) поводить себе хаотичним чином доти, доки не потрапить в область притягання метастабільного розв'язку $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$. (Область притягання розв'язку — це всі ті початкові умови, які ведуть до цього розв'язку.) Як тільки це відбувається, осцилятор відштовхується нестійкою метастабільною орбітою і потрапляє в область притягання стійкого розв'язку $\tilde{u}^{(1)}(t; 3)$, на якому врешті-решт і стабілізуються коливання. Хаотична поведінка осцилятора до того моменту часу, коли відбувається перехід до стійкого періодичного розв'язку, називається *перехідним хаосом*⁷ [69, с. 173]. Зрозуміло, що тривалість перехідного хаосу залежить як від початкових умов, так і від точності чисельних розрахунків, самого чисельного методу тощо. Проте усереднена тривалість перехідного хаосу зменшується з віддаленням від критичної частоти, при якій відбувається руйнування атрактора, так що при $\omega = 1.619$ вже ніякого перехідного хаосу не спостерігається.

Описане раптове руйнування хаотичного атрактора, що супроводжується перехідним хаосом, є різновидом криз атракторів. Це явище вперше детально описали і пояснили Гребоджі, Отт і Йоркі [27] (1982 р.) на прикладі логістичного відображення, див. також

⁷transient chaos (англ.)

ряд більш пізніх робіт [28, 29, 30, 31] цієї команди авторів. Ними було також встановлено, що поблизу критичного порогу, при якому відбувається руйнування атрактора, усереднена за початковими умовами тривалість перехідного хаосу для великого числа систем задовольняє закону

$$\langle \tau \rangle \sim |p - p_c|^{-\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad (72)$$

де p — параметр системи, що змінюється, p_c — його критичне значення. Величина γ називається *критичним показником*. У деяких системах спостерігається також *суперперехідний хаос*, усереднена тривалість якого задовольняє закону

$$\langle \tau \rangle \sim \exp(|p - p_c|^{-\gamma}), \quad \gamma > 0. \quad (73)$$

Висновки

У першій частині даного розділу зроблено класифікацію коливальних задач та зосереджено увагу на їх зв'язку з іншими розділами фізики, а також проаналізовано роль нелінійності в теорії коливань. Розглянуто вільні, вимушені та автоколивання. Для повноти матеріалу слід би було розглянути ще й параметричні коливання. Сподіваємось, що це вдасться зробити в майбутньому.

У другій частині головну увагу приділено методам пошуку наближених розв'язків сильно нелінійних коливальних задач, а саме методам гармонічного балансу та рівномірних розкладів. На основі методу гармонічного балансу викладено загальну послідовну схему дослідження вимушених коливань, що описуються звичайними диференціальними рівняннями другого порядку з довільною поліноміальною нелінійністю. Зроблено класифікацію можливих субгармонічних розв'язків. Теорію Флоке стійкості періодичних розв'язків адаптовано для аналізу стійкості апроксимацій гармонічного балансу у випадку довільного числа врахованих гармонік.

Третю частину присвячено вивченню вимушених коливань у рівнянні Дюффінга з жорсткою нелінійністю. Розглянуто явища супергармонічних резонансів третього та другого порядків. Розраховано каскади подвоєння періоду (м'яке збудження субгармонік парного порядку) та знайдено перші кілька наближень числа Фейгенбаума. Одержано також субгармонічні розв'язки непарних та парних порядків, що збуджуються жорстко. Детально досліджено хаотичні коливання. Описано природу хаотичних атракторів, явища криз хаотичних атракторів та перехідний хаос.

Автори висловлюють велику подяку професору *Крістіану Харіффу* та *Марку Французу* за забезпечення нас потрібною літературою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности: Пер. с англ. / Ред. Х. Суинни, Д. Голлаб. – М.: Мир, 1984. – 344 с.
3. Крюков Б. И., Просвирин В. М., Середович Г. И. Несимметричные гармонические колебания в системах с симметрической нелинейной характеристикой // Машиноведение. – 1980. – Т. 2. – С. 13–15.
4. Крюков Б. И., Середович Г. И. О “странном” поведении решений уравнения Дюффинга // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 258, № 2. – С. 311–314.
5. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
6. Мальков В. А. О методе Галеркина отыскания периодических и квазипериодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений // Украинский математический журнал. – 1983. – Т. 35, № 6. – С. 773–777.
7. Мун Ф. Хаотические колебания: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 312 с.
8. Найфе А. Х. Введение в теорию возмущений: Пер. с англ. – М.: Наука, 1981. – 535 с.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа: В 2-х т. Пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Гос. из-во физ.-мат. лит., 1963. – Т. 2: Трансцендентные функции. – 515 с.
10. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 432 с.
11. Шустер Г. Детерминированный хаос: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
12. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

13. Addo-Asah W., Akpati H. C., Mickens R. E. Investigation of a generalized Van der Pol oscillator differential equation // J. Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 179, № 4. – P. 733–735.
14. Al-Qaisia A. A. Bifurcations of approximate harmonic balance solutions and transition to chaos in an oscillator with inertial and elastic symmetric nonlinearities // J. Sound and Vibration. – 2001. – Vol. 244, № 3. – P. 453–479.
15. Auerbach D., Cvitanović P., Eckmann J.-P., Gunaratne G., Procaccia I. Exploring chaotic motion through periodic orbits // Phys. Rev. Lett. – 1987. – Vol. 58, № 23. – P. 2387–2389.
16. Blair K. B., Krousgrill C. M., Farris T. N. Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of Duffing's equation // J. Sound and Vibration. – 1997. – Vol. 202, № 5. – P. 717–731.
17. Brown R. G. W., Pike E. R. A History of Optical and Optoelectronic Physics in the Twentieth Century // Twentieth Century Physics / Ed. L. M. Brown, A. Pais, B. Pippard. – Bristol, Philadelphia, New York: Institute of Physics Publishing, American Institute of Physics Press, 1995. – Vol. 3. – Chap. 18. – P. 1385–1504.
18. Burton T. D. A perturbation method for certain non-linear oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 1984. – Vol. 19, № 5. – P. 397–407.
19. Burton T. D., Rahman Z. On the multi-scale analysis of strongly non-linear oscillators // Int. J. Non-Linear Mechanics. – 1986. – Vol. 21, № 2. – P. 135–146.
20. Donescu P., Virgin L. N. Periodic solutions of an unsymmetric oscillator including a comprehensive study of their stability characteristics // J. Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 192. – P. 959–976.
21. Dowell E. H., Pezeshki C. On necessary and sufficient conditions for chaos to occur in Duffing's equation: an heuristic approach // J. Sound and Vibration. – 1988. – Vol. 121, № 2. – P. 195–200.
22. Feigenbaum M. J. Qualitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Statistical Physics. – 1978. – Vol. 19. – P. 25–52.
23. Feigenbaum M. J. Universal behavior in nonlinear systems¹ // Los Alamos Science. – 1980. – Vol. 1, № 1. – P. 4–27.

¹Існує переклад: Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, № 2. – С. 343–374.

24. Floquet G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques // Ann. de l'École Norm. Super. – 1883. – Vol. 2, № XII. – P. 47–88.
25. Gandzha I. S., Lukomsky V. P. Uniform expansions of periodic solutions for the third superharmonic resonance // Nonlinear Dynamics. – 2004. – Vol. 37, № 3. – P. 171–179.
26. Gonzalez D. L., Piro O. Chaos in a nonlinear driven oscillator with exact solution // Phys. Rev. Lett. – 1983. – Vol. 50, № 12. – P. 870–872.
27. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors in crisis // Phys. Rev. Lett. – 1982. – Vol. 48, № 22. – P. 1507–1510.
28. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation // Phys. Rev. Lett. – 1983. – Vol. 50, № 13. – P. 935–938.
29. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos // Physica D. – 1983. – Vol. 7. – P. 181–200.
30. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems // Phys. Rev. Lett. – 1986. – Vol. 57, № 11. – P. 1284–1287.
31. Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J. A. Critical exponents for crisis-induced intermittency // Phys. Rev. A. – 1987. – Vol. 36, № 11. – P. 5365–5380.
32. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors // Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 37, № 5. – P. 1711–1724.
33. Gwinn E. G., Westervelt R. M. Fractal basin boundaries and intermittency in the driven damped pendulum // Phys. Rev. A. – 1986. – Vol. 33, № 6. – P. 4143–4155.
34. Hamdan M. N., Burton T. D. On the steady state response and stability of non-linear oscillators using harmonic balance // J. Sound and Vibration. – 1993. – Vol. 166, № 2. – P. 255–266.
35. Han R. P. S., Luo A. C. Comments on “Subharmonic resonances and criteria for escape and chaos in a driven oscillator” // J. Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 196, № 2. – P. 237–242.
36. Hassan A. Use of transformations with the higher order method of multiple scales to determine the steady state periodic response of harmonically

- excited non-linear oscillators. Part I: Transformation of derivative // J. Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 178, № 1. – P. 1–19.
37. Hassan A. Use of transformations with the higher order method of multiple scales to determine the steady state periodic response of harmonically excited non-linear oscillators. Part II: Transformation of detuning // J. Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 178, № 1. – P. 21–40.
38. Hassan A., Burton T.D. Extraneous solutions predicted by the harmonic balance method // J. Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 182, № 4. – P. 523–539.
39. Hassan A. The KBM derivative expansion method is equivalent to the multiple-time-scales method // J. Sound and Vibration. – 1997. – Vol. 200, № 4. – P. 433–440.
40. Holmes P. J. A nonlinear oscillator with a strange attractor // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. – 1979. – Vol. 292. – P. 419–448.
41. Huberman B. A., Crutchfield J. P. Chaotic States of Anharmonic Systems in Periodic Fields // Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 43, № 23. – P. 1743–1747.
42. Janicki K. L., Szemplińska-Stupnicka W. Subharmonic resonances and criteria for escape and chaos in a driven oscillator // J. Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 180, № 2. – P. 253–269.
43. Janicki K. L., Szemplińska-Stupnicka W. Reply Comments on “Subharmonic resonances and criteria for escape and chaos in a driven oscillator” // J. Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 196, № 2. – P. 241–242.
44. Kapitaniak T. Analytical method of controlling chaos in Duffing’s oscillator // J. Sound and Vibration. – 1993. – Vol. 163, № 1. – P. 182–187.
45. Kapitaniak T. Author’s Reply to “A discussion of an analytical method of controlling chaos in Duffing’s oscillator” // J. Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 184, № 5. – P. 934–935.
46. Lathrop D. P., Kostelich E. J. Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits // Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 40, № 7. – P. 4028–4031.
47. Leung A. Y. T. Fourier series for products of periodic vectors // J. Sound and Vibration. – 1991. – Vol. 144, № 2. – P. 362–364.
48. Ling F. H. Quasi-periodic solutions calculated with the simple shooting

- technique // J. Sound and Vibration. – 1991. – Vol. 144. – P. 293–304.
49. Lukomsky V.P., Bobkov V.B. Asymptotic expansions of the periodic solutions of nonlinear evolution equations // Nonlinear Dynamics. – 1998. – Vol. 16, № 1. – P. 1–21.
50. Lukomsky V.P., Gandzha I. S. Uniform expansions of periodic solutions to strongly non-linear evolution equations with odd polynomial non-linearity // Nonlinear Dynamics. – 2003. – Vol. 32, № 4. – P. 345–370.
51. Lukomsky V.P., Gandzha I. S. Cascades of subharmonic stationary states in strongly non-linear driven planar systems // J. Sound and Vibration. – 2004. – Vol. 275, № 1–2. – P. 351–373.
52. Lukomsky V., Gandzha I., Lukomsky D. Uniform asymptotic expansions of the periodic solutions of the ordinal differential equations // Сучасні проблеми математики / Матеріали міжнародної наукової конференції. – Чернівці–Київ: Інститут математики, 1998. – Т. 2. – С. 88–93.
53. Mandal S. Quantum oscillator of quartic anharmonicity // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – Vol. 301. – P. 501–505.
54. Mickens R.E. A generalization of the method of harmonic balance // J. Sound and Vibration. – 1986. – Vol. 111, № 3. – P. 515–518.
55. Mickens R. E. Bounds on the Fourier coefficients for the periodic solutions of non-linear oscillator equations // J. Sound and Vibration. – 1988. – Vol. 124, № 1. – P. 199–203.
56. Mickens R. E., Semwogerere D. Fourier analysis of a rational harmonic balance approximation for periodic solutions // J. Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 195, № 3. – P. 528–530.
57. Mirus K. A., Sprott J. C. Controlling chaos in low- and high-dimensional systems with periodic parametric perturbations // Phys. Rev. E. – 1999. – Vol. 59, № 5. – P. 5313–5324.
58. Moon F. C., Li G.-X. Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motion in a two-well potential // Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 55, № 14. – P. 1439–1442.
59. Ockendon H., Ockendon J. R., Waterhouse D. D. Multi-mode resonances in fluids // J. Fluid Mech. – 1996. – Vol. 315. – P. 317–344.
60. Ott E., Sommerer J. C., Alexander J. C., Kan I., Yorke J. A. Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 71, № 25. – P. 4134–4137.

-
61. Padmanabhan C., Singh R. Analysis of periodically excited non-linear systems by a parametric continuation technique // J. Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 184. – P. 35–58.
 62. Poland D. Loci of limit cycles // Phys. Rev. E. – 1994. – Vol. 49, № 1. – P. 157–165.
 63. Rahman Z., Burton T.D. Large amplitude primary and superharmonic resonances in the Duffing oscillator // J. Sound and Vibration. – 1986. – Vol. 110, № 3. – P. 363–380.
 64. Sauer T., Grebogi C., Yorke J. A. How long do numerical chaotic solutions remain valid? // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79, № 1. – P. 59–62.
 65. Schmelcher P., Diakonov F. K. Detecting unstable periodic orbits of chaotic dynamical systems // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 78, № 25. – P. 4733–4736.
 66. Semler C., Gentleman W.C., Païdoussis M.P. Numerical solutions of second order implicit non-linear ordinary differential equations // J. Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 154, № 4. – P. 553–574.
 67. So P., Ott E., Schiff S.J., Kaplan D.T., Sauer T., Grebogi C. Detecting unstable periodic orbits in chaotic experimental data // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76, № 25. – P. 4705–4708.
 68. So P., Ott E., Sauer T., Gluckman B.J., Grebogi C., Schiff S.J. Extracting unstable periodic orbits from chaotic time series data // Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 55, № 5. – P. 5398–5417.
 69. Sprott J.C. Chaos and Time-Series Analysis. – New York: Oxford University Press, 2003. – 507 p.
 70. Szemplińska-Stupnicka W. Secondary resonances and approximate models of routes to chaotic motion in non-linear oscillators // J. Sound and Vibration. – 1987. – Vol. 113, № 1. – P. 155–172.
 71. Szemplińska-Stupnicka W., Rudowski J. Local methods in predicting occurrence of chaos in two-well potential systems: superharmonic frequency region // J. Sound and Vibration. – 1992. – Vol. 152, № 1. – P. 57–72.
 72. Szemplińska-Stupnicka W. A discussion of an analytical method of controlling chaos in Duffing's oscillator // J. Sound and Vibration. – 1994. – Vol. 178, № 2. – P. 276–284.
 73. Thylwe K.-E., Gravador E. Non-perturbative stability analysis of periodic

- responses in driven non-linear oscillators // J. Sound and Vibration. – 1995. – Vol. 182, № 2. – P. 191–207.
74. Ueda Y. Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation // J. Statistical Physics. – 1979. – Vol. 20. – P. 181–196.
75. Van Dooren R. On the transition from regular to chaotic behaviour in the Duffing oscillator // J. Sound and Vibration. – 1988. – Vol. 123, № 2. – P. 327–339.
76. Van Dooren R. Comments on “Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of Duffing's equation” // J. Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 221, № 3. – P. 525–529.
77. Von Groll G., Ewins D.J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems // J. Sound and Vibration. – 2001. – Vol. 241. – P. 223–233.
78. Worden K., Tomlinson G.R. Nonlinearity in Structural Dynamics. – Bristol: Institute of Physics Publishing, 2000. – 660 p.
79. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves² // Advances in Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 22. – P. 67–229.

²Існує переклад: Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде: Пер. с англ. // Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. – М.: Мир, 1987. – 179 с.